



دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری

نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

دانشجو

محسن مسعودی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

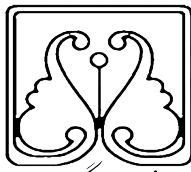
استادان مشاور

استاد مشاور اول

استاد مشاور دوم

اسفند ۱۳۹۷

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شاهرود

گروه ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

دانشجو

محسن مسعودی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

استادان مشاور

استاد مشاور اول

استاد مشاور دوم

اسفند ۱۳۹۷



باسمه تعالی
صور تجلسه دفاع از رساله دکتری

جلسه دفاع از رساله دکتری تخصصی آقای محسن مسعودی در رشته: ریاضی گرایش: ریاضی کاربردی با عنوان:

نتایج در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

به ارزش ۲۰ واحد، در ساعت ۱۶:۰۰ روز سه شنبه مورخ ۱۳۹۷/۱۲/۰۷ در محل دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان تشکیل شد. هیأت داوران پس از بررسی، نتیجه را به شرح زیر اعلام می‌دارند:

☐ رساله با نمره و با امتیاز عالی ☐، بسیار خوب ☐، خوب ☐، قابل قبول ☐ مورد تأیید قرار گرفت.

☒ رساله در وضع فعلی با اصلاحات جزئی و نمره ۱۹.۵ و امتیاز عالی ☒، بسیار خوب ☐، خوب ☐، قابل قبول ☐ پذیرفته شد.

☐ رساله به شکل فعلی، مورد تأیید قرار نگرفت و پیشنهاد شد

امضا	محل کار عضو هیأت داوران	تخصص	مرتبه دانشگاهی	اعضاء هیأت داوران
	دانشگاه گیلان		استاد	استاد(ان) راهنما ۱- دکتر داود جهرمی سالکویه
				استاد(ان) مشاور ۱- دکتر ۲- دکتر
	دانشگاه فردوسی مشهد	آنالیز عددی	استاد	داوران ۱- دکتر فائزه توتونیان
	دانشگاه گیلان	بهبود سازی	دانشیار	۲- دکتر سعید کتابچی
	دانشگاه گیلان	آنالیز عددی	دانشیار	۳- دکتر حسین امینی خواه

امضا	گروه آموزشی/پژوهشی	مرتبه دانشگاهی	نماینده تحصیلات تکمیلی ^۱
	ریاضی محض	استاد	دکتر نصیر تقی زاده

۱- چهار نسخه اصل از صورتجلسه توسط نماینده تحصیلات تکمیلی تنظیم و به مدیر گروه تسلیم شود. یک نسخه در گروه آموزشی، یک نسخه در آموزش دانشکده، یک نسخه در پرونده دانشجو نگهداری و یک نسخه نیز به دانشجو تحویل داده شود.



حوزه معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه

تعهذنامه اصالت رساله

اینجانب محسن مسعودی دانش‌آموخته مقطع دکتری در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۱۳۹۷/۱۲/۷ از رساله خود با عنوان *نتایجی در پیش شرط‌سازی مسائل نقطه زینی با کسب نمره ۱۹/۵ و درجه عالی دفاع نموده‌ام، اظهار می‌کنم که:*

۱. این رساله حاصل تحقیق و پژوهش اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از کتاب، مقاله و ...) استفاده کرده‌ام، مطابق ضوابط موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست منابع ذکر و درج نموده‌ام.

۲. این رساله پیشتر برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین‌تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی داخلی و خارجی ارائه نشده است.

ضمناً متعهد می‌شوم:

۳. چنانچه بعد از دانش‌آموختگی، قصد استفاده و هر گونه بهره‌برداری اعم از چاپ مقاله، کتاب، ثبت اختراع و ... از این رساله را داشته باشم، از استاد محترم راهنما و گروه آموزشی مربوطه مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۴. چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و دانشگاه گیلان مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام، هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

۹۷، ۱۲، ۷

تاریخ و امضاء:

خدای راسبی نکاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا د سایه درخت پربار وجودشان بیایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودشان تاج افتخاری است بر سرم و نشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند، و ستم را گرفتند و راه رفتن را در این ولای زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا نمودند. این تحفه ناپخته تقدیم به وجود عزیزشان.

پروردگار تو را پاس می گویم که بار دیگر به من فرصت آموختن دادی.
 اکنون که با استعانت از نگاه پروردگار منان کامی دیگر از زندگیم را پشت سر نهادم بر خود لازم می دانم مراتب پاس و قدردانی صمیمانه خویش را تقدیم به همه کسانی کنم که طی این مدت مرئوس و اوهداند.
 از پدر و مادر عزیز و مهربانم به خاطر زمانی که در طول زندگی بهواره برای پیروزی و شکوای من به جان خریدند، تشکر می نمایم.
 بر خود واجب می دانم از استاد فرزانه عزیز جناب آقای دکتر داود نخبه سالکیه که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف این پایان نامه بهواره با سعه صدر و گشاده رویی در کنارم بودند و در طول مدت تحصیل از راهنمایی های اخلاقی و علمی ایشان بهواره بهره جسته ام کمال تشکر و قدردانی نمایم و برای ایشان طول عمر توام با عزت و سر بلندی را آرزو مندم. توصیه های ارزنده شان را علشای زندگیم بوده و خواهد بود.
 از استاد دکتر سرکار خانم دکتر فائزه توتونیان که زحمت داوری رساله ایجاب را قبول فرمودند کمال تشکر و امتنان را دارم. همچنین از اساتید عزیز آقا ایمان دکتر سعید کنگاچی و دکتر حسین ایمنی خواه
 نیز که قبول زحمت داوری این رساله را فرمودند، کمال تشکر و پاس را دارم.
 در نهایت از همه دوستانی که در این مدت کنارم بودند و مرئوس نمودند، قدردانی می نمایم.

فهرست مطالب

پ	فهرست مطالب
ج	فهرست جداول
چ	فهرست تصاویر
ح	فهرست الگوریتم‌ها
خ	چکیده
۱	قالب دانشگاه گیلان
۱	۱.۰ وارد کردن مشخصات و آشنایی با دستورات
۶	۲.۰ نحوه تولید نمایه‌های مختلف در قالب دانشگاه گیلان
۶	۱.۲.۰ تولید نمایه اتوماتیک
۶	۱.۱.۲.۰ وارد کردن کلمات
۱۱	۲.۱.۲.۰ اجرای xindy و نمایش کلمه در نمایه
۱۲	۳.۱.۲.۰ فراخوانی‌های متفاوت
۱۴	۴.۱.۲.۰ مثال
۱۷	۲.۲.۰ نمایه‌های دستی
۱۸	۱.۲.۲.۰ نمونه‌های ورودی و خروجی واژه‌ها
۱۹	۳.۰ فراخوانی یک کد متلب (mfile)
۲۰	۴.۰ نمونه محیط‌های ریاضی
۲۰	۵.۰ فهرست منابع و ارجاع به آنها
۲۱	۱.۵.۰ نحوه تولید فهرست منابع با استفاده از Bibtex
۲۲	۱.۱.۵.۰ مزیت‌های این روش
۲۲	۲.۱.۵.۰ قرار دادن مراجع فارسی قبل از مراجع انگلیسی
۲۳	۳.۱.۵.۰ نمونه‌هایی از مراجع
۲۳	۴.۱.۵.۰ نکته مهم
۲۵	۲.۵.۰ نحوه تولید فهرست منابع بدون Bibtex
۲۶	پیش‌گفتار
۳۱	فصل ۱. پیش‌نیازها
۳۱	۱.۱ تعاریف و قضایا

۳۷	عدد شرطی و پیش شرط سازی دستگاه معادلات خطی	۲.۱
۴۰	روش های تکراری ایستا	۳.۱
۴۱	معرفی روش های مبتنی بر زیرفضای کرایلف	۴.۱
۴۱	۱.۴.۱ الگوریتم مانده ی مینیمال تعمیم یافته (GMRES)	
۴۷	۲.۴.۱ الگوریتم گرادیان مزدوج (CG)	
۴۸	الگوریتم گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده (PCG)	۵.۱
۴۸	الگوریتم مینیمم درجه (MD)	۶.۱
۵۱	نتایجی در روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی	فصل ۲.
۵۱	روش شکافت معین مثبت و پادهرمیتی (PSS)	۱.۲
۵۳	روش PSS ناقص (IPSS)	۲.۲
۵۴	روش شکافت انتقال (SS)	۳.۲
۵۵	روش شکافت هرمیتی و پادهرمیتی (HSS)	۴.۲
۵۷	روش شکافت نرمال و پادهرمیتی (NSS)	۵.۲
۵۷	روش PSS توسعه یافته (EPSS)	۶.۲
۵۸	نتایجی در مسائل نقطه زینی	فصل ۳.
۵۸	مقدمه	۱.۳
۵۹	برخی از کاربردها	۲.۳
۵۹	۱.۲.۳ مسائل بهینه سازی نقطه زینی	
۶۱	۲.۲.۳ مسائل کم ترین مربعات	
۶۳	نتیجه گیری	
۶۵	کتاب نامه	
۷۳	پیوست الف . نمونه الگوریتم ها و جداول مختلف	
۷۵	الف ۱. نمونه جدول	
۸۰	الف ۲. خروجی متلب به عنوان دستورات \LaTeX	
۸۲	نمادهای اختصاری	
۸۳	واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۸۵	واژه یاب فارسی	
۸۶	واژه نامه انگلیسی به فارسی	
۸۸	فهرست اختصارات	
۹۰	واژه یاب انگلیسی	
۹۱	نمادهای اختصاری	

فهرست جداول

الف ۱. مشخصات ماتریس‌های A و B به ازای شبکه‌های مختلف.	۷۵
الف ۲. مشخصات کلی ماتریس‌های A ، B و C برای آزمون‌ها.	۷۵
الف ۳. مشخصات کلی ماتریس‌های A ، B و C برای آزمون‌ها.	۷۶
الف ۴. شعاع طیفی و مقدار پارامتر پیشنهادی.	۷۷
الف ۵. تکرار و زمان محاسبه برای روش $IEPSS$.	۷۷
الف ۶. مشخصات ماتریس‌های A و B به ازای شبکه‌های مختلف.	۷۸
الف ۷. نتایج عددی برای مسئله جریان درون کانال با شبکه $2^r \times 2^r$.	۷۸
الف ۸. مشخصات کلی ماتریس‌های A ، B و C برای آزمون‌ها.	۷۸
الف ۹. نتایج عددی برای مسئله حفره با درپوش متحرک با شبکه $2^r \times 2^r$.	۷۹
الف ۱۰. پیش‌شرط‌سازهای خاصی از پیش‌شرط‌ساز \mathcal{P}_{EPSS} .	۷۹
الف ۱۱. نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال؟؟.	۸۰
الف ۱۲. نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال؟؟.	۸۱

فهرست تصاویر

۷	نحوه قرار دادن کلمات در فایل MyWords دیکشنری‌ها	۱
۸	نحوه قرار دادن کلمات در فایل MyWords اختصارات	۲
۱۰	نحوه قرار دادن کلمات در فایل MyWords نمادها	۳
۱۱	کپی کردن دستورات	۴
۱۲	قرار دادن دستورات	۵
۱۲	اجرای دستور gloss و قرار گرفتن کلمات در نمایه‌ها	۶
۱۳	نمایه‌های اتوماتیک	۷
۱۵	توزیع مقادیر ویژه ماتریس پیش شرط‌سازی شده P_{SEPSA}^{-1}	۸
۱۶	توزیع مقادیر ویژه ماتریس پیش شرط‌سازی شده P_{SEPSA}^{-1}	۹
۱۷	نمایه‌های دستی	۱۰
۲۳	قرار دادن منابع و مراجع فارسی در ابتدای منابع	۱۱
۵۰	تاثیر الگوریتم مینیمم درجه	۱۰.۱

¹Preconditioned

فهرست الگوریتم‌ها

۴۴	الگوریتم روش گرام-اشمیت آرنولدی	۱.۱
۴۵	الگوریتم روش گرام-اشمیت آرنولدی اصلاح شده	۲.۱
۴۶	الگوریتم روش مانده مینیمال تعمیم یافته (GMRES)	۳.۱
۴۶	الگوریتم روش GMRES با شروع مجدد $GMRES(m)$	۴.۱
۴۷	الگوریتم روش $GMRES(m)$ با پیش شرط ساز راست	۵.۱
۴۸	الگوریتم CG برای حل دستگاه $Ax = b$	۶.۱
۴۹	الگوریتم روش گرادیان مزدوج با پیش شرط ساز چپ	۷.۱
۵۴	روش تکراری PSS ناقص (IPSS)	۱.۲
۷۳	الف ۱. الگوریتم روش $GMRES(m)$ با پیش شرط ساز راست	
۷۴	الف ۲. الگوریتم روش $GMRES(m)$ با پیش شرط ساز راست	
۷۴	الف ۳. method IEPSS	
۷۴	الف ۴. Computation $y = x^n$	
۷۵	الف ۵. الگوریتم هم رنگ سازی چندبانه	

نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

محسن مسعودی

در این رساله، ابتدا به بررسی حل عددی یک دستگاه معادلات خطی می پردازیم و یک روش تکراری را که تعمیمی از روش تجزیه معین مثبت و پادهرمیتی است، ارائه می کنیم. برای حالت های خاصی از این روش، مقادیری را برای پارامتر آن پیشنهاد می دهیم. سپس به بررسی مسائل نقطه زینی پرداخته و روش های تکراری و پیش شرط سازی را برای حل این مسائل به دست می آوریم. در ادامه، تعمیم روش معین مثبت و پادهرمیتی را برای این مسائل بکار گرفته و شرایط همگرایی و نیمه همگرایی آن را مورد مطالعه قرار می دهیم. خواهیم دید که این روش تعمیم بسیاری از روش های است که برای حل این مسأله پیشنهاد شده اند. در نهایت، یک حالت خاص از این روش را بررسی کرده و پارامترهای بهینه را برای این روش به دست می آوریم. نتایج به دست آمده را با مثال هایی مورد آزمون و مقایسه قرار می دهیم.

کلید واژه: مسائل نقطه زینی، پیش شرط سازی، همگرایی، نیمه همگرایی.

قالب دانشگاه گیلان

این قسمت مقدمه‌ای بسیار کوتاه برای نوشتن یک رساله یا پایان‌نامه یا پروژه در این فایل می‌باشد. لذا قبل از شروع به نوشتن، ابتدا این بخش را مطالعه نمایید تا با نحوه نوشتن مطالب و برخی از دستورات لازم آشنا شوید. یک فایل راهنما نیز در سایت دانشکده قرار دارد که حتماً آن را مطالعه کنید. از آنجا که یک پایان‌نامه یا رساله، نوشته‌ای طولانی است، قسمت‌های مختلف آن در فایل‌های جداگانه قرار گرفته‌اند تا باعث شلوغی فایل و سردرگمی نشود.

۱.۰ وارد کردن مشخصات و آشنایی با دستورات

فایل اصلی این مجموعه:

Thesis.tex

می‌باشد. اگر به فایل Thesis.tex دقت کنید، متوجه می‌شوید که قسمت‌های مختلف آن، توسط دستورهای مانند `\input` و `\include` در فایل اصلی، یعنی Thesis.tex فراخوانی شده‌اند. تغییرات مورد نیاز در فایل‌هایی که با دستور `\include` فراخوانی شده‌اند، انجام می‌پذیرد. در این فایل، فرض شده است که پایان‌نامه یا رساله یا پروژه شما، از سه فصل اصلی، یک پیش‌گفتار، یک فصل نتیجه‌گیری و یک پیوست تشکیل شده است. البته سه پیوست اضافه نیز برای ترسیم برخی اشکال و نمودارها در \LaTeX در فایل Thesis-Example.tex وجود دارند. به منظور افزایش سرعت اجرای برنامه، در حالت پیش‌فرض در کنار آنها علامت درصد قرار داده شده است (Appendix ۴، ۳، ۲) که برای مشاهده آنها، می‌توانید این علامات را بردارید. برای اجرا نشدن و فراخوانی نشدن هر فایل یا دستور یا عبارتی، باید در کنار آن علامت % قرار دهید تا توسط \LaTeX خوانده نشوند. پس از اتمام هر فصل، می‌توانید در کنار دستور فراخوانی آن فصل، علامت درصد قرار دهید تا آن فصل فراخوانی نشود و زمان اجرای برنامه کاهش یابد. در این قالب از فونت‌های درون پوشه Fonts روی سایت دانشکده استفاده شده و باید حتماً آنها را نصب کنید. فونت اصلی این قالب XB Niloofar است که اعداد و حروف انگلیسی آن تغییر کرده است و صفر آن توخالی شده است. پس این فونت در این پوشه حتماً نصب شود.

(۱) تنظیمات پایه‌ای کلاس در فایل GUI-Thesis.cls قرار دارد که تنظیمات اصلی این پایان‌نامه یا رساله در اینجا تعریف شده و نیاز به تغییر ندارد.

(۲) برای رسم گراف‌هایی که در Appendix4 است، نیاز به بسته tkz-graph می‌باشد که در تکس لایو ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹ وجود داشت. اما در TexLive ۲۰۲۰ این بسته حذف شده و بنابراین Appendix4 در

TexLive 2020 اجرا نمی‌شود. لذا فراخوانی بسته tkz-graph بعد از فراخوانی استایل دانشگاه گیلان قرار داده شده است تا اگر از TeXLive 2020 استفاده نمی‌کنید و به رسم نمونه گراف‌های Appendix4 نیاز دارید، درصد این قسمت را بردارید.

۳) مشخصات خود را در فایل jeld.tex وارد کنید. مشخصات پشت و روی جلد، همچنین بخش‌های اصالت‌نامه فارسی و انگلیسی، اطلاعیه جلسه روز دفاع، صورتجلسه دفاع فارسی و انگلیسی همگی در این قسمت وارد می‌شوند. در مورد اصالت‌نامه فارسی و انگلیسی (همچنین صورتجلسه دفاع فارسی و انگلیسی) این نکته قابل ذکر است که تا قبل از دفاع، همه این موارد بصورت نوشتاری در فایل رساله قرار می‌گیرند. اما پس از دفاع، باید فایل اسکن امضا شده این موارد در پایان نامه قرار گیرد. برای این منظور باید پس از امضا این صفحات، اسکن‌های صفحات امضا شده در پوشه resources قرار گیرند و سپس علامات درصد از مکان‌هایی که در فایل Thesis.tex مشخص شده‌اند را برداشته و نام‌های فایل‌های اسکن شده را وارد کنید تا صفحات امضا شده در فایل رساله قرار گیرند.

۴) در صورت وجود، دستورات قابل تعریف توسط کاربر در فایل MyCommands.tex قرار داده می‌شوند. در این قسمت می‌توانید دستورات جدید تعریف کنید و در هنگام نوشتن رساله از آنها استفاده کنید. به طور مثال، در فایل نمونه دستورهای همراه با چندین آرگومان با \newcommand یا \def معرفی شده‌اند. از این رو ممکن است در فصل‌های این فایل نمونه، دستوراتی ببینید که در فایل دیگری قابل اجرا نباشند. در برنامه Texstudio تمایز دستورات معرفی شده توسط کاربر غالباً مشخص می‌باشد. اگر روی آنها کلیک کردید و توانستید وارد بسته مربوط به آنها شوید، این دستورات در آن بسته معرفی شده‌اند. در غیر اینصورت این دستور فقط در این متن تعریف شده است.

۵) کلماتی که برای تهیه نمایه‌ها استفاده می‌شوند در فایل MyWords.tex وارد می‌شوند.

۶) چکیده‌های فارسی و انگلیسی و کلیدواژه‌ها را در فایل Abstract.tex وارد کنید.

قسمت‌های خروجی پایان نامه بین دستورات

```
\begin{document}

\end{document}
```

قرار دارند که شامل قسمت‌های مختلف زیر است:

۱. \Ettelaie: اطلاعیه جلسه دفاع که پس از مشخص شدن تاریخ دفاع باید تکمیل شود و می‌توانید قبل از دفاع، بمنظور اطلاع‌رسانی در برد دانشکده نصب کنید. این اطلاعیه در اولین صفحه فایل پی‌دی‌اف قرار می‌گیرد که تا زمان دفاع نباید درصد این قسمت برداشته شود. موارد مورد نیاز این قسمت در فایل Jeld.tex تکمیل می‌شود.

۲. \JeldFarsi: توسط این دستور "روی جلد" در فایل خروجی ظاهر می‌شود که شامل نام و نام خانوادگی دانشجو و استاد راهنما و عنوان پایان نامه و ... می‌باشد که تا زمان تحویل به گروه نیازی به برداشتن درصد این قسمت نیست. قسمت‌های مختلف این بخش نیز در فایل Jeld.tex تکمیل می‌شوند.

۳. DefenceFarsi: توسط این دستور "صورتجلسه دفاع فارسی" قرار می‌گیرد. این صفحه را قبل از دفاع به نماینده تحصیلات تکمیلی تحویل دهید تا امضاهای جلسه دفاع در این صفحه انجام شود. قسمت‌های مختلف این بخش نیز در فایل Jeld.tex تکمیل می‌شوند.
۴. EsalatFarsi: توسط این دستور "تعه‌دنامه فارسی" در خروجی قرار می‌گیرد. قبل از تحویل به پایان نامه به کتابخانه این صفحه باید امضا شده و اسکن آن در پایان نامه قرار گیرد. قسمت‌های مختلف این بخش نیز در فایل Jeld.tex تکمیل می‌شوند.
۵. \pagenumbering{harfi}: این دستور برای شماره نویسی بر حسب حروف الفباست.
۶. \include{Present}: توسط این دستور صفحات "تقدیم به" و "سپاسگزاری" در پایان نامه قرار داده می‌شوند که این دو قسمت در فایل Present.tex نوشته می‌شوند. درصد این قسمت را پس از تهیه نسخه نهایی و قبل از تحویل به کتابخانه بردارید.
۷. \tableofcontents: توسط این دستور فهرست مطالب قرار داده می‌شود.
۸. \listoftables: توسط این دستور لیست جداول موجود در رساله قرار داده می‌شود که در صورت عدم نیاز می‌توان کنار آن علامت درصد گذاشت.
۹. \listoffigures: توسط این دستور لیست شکل‌های موجود در رساله قرار داده می‌شود که در صورت عدم نیاز می‌توان کنار آن علامت درصد گذاشت.
۱۰. \listofalgorithms: توسط این دستور لیست الگوریتم قرار داده می‌شود که در صورت عدم نیاز می‌توان کنار آن علامت درصد گذاشت.
۱۱. AbstractFarsi: توسط این دستور چکیده فارسی قرار داده می‌شود. قسمت‌های مختلف بخش چکیده در فایل Abstract.tex وارد می‌شود.
۱۲. \setpages: توسط این دستور تنظیمات سبک صفحات قرار داده می‌شود که نباید علامت درصد در کنار آن قرار گیرد. پس از این دستور شماره صفحات عددی می‌شوند.
۱۳. Ordin.tex توضیح مختصری درباره استایل دانشگاه گیلان داده شده است.
۱۴. پیش‌گفتار در فایل Introd.tex قرار داده می‌شود.
۱۵. مطالب فصل اول در Chapter1.tex وارد کنید.
۱۶. مطالب فصل دوم در Chapter2.tex وارد کنید.
۱۷. نتیجه‌گیری در Conclusion.tex قرار می‌گیرد.
۱۸. در صورت وجود پیوست، آن را در فایل Appendix1.tex قرار دهید.

۱۹. مراجع و رفرنس‌ها توسط فراخوانی فایل References.tex در رساله قرار داده می‌شود. دو روش مختلف برای تهیه مراجع وجود دارد که شامل استفاده از bibtex و روش بدون استفاده از bibtex می‌باشد که اکیدا روش استفاده از bibtex پیشنهاد می‌شود.

۲۰. نمایه‌های مختلفی در این رساله وجود دارد که در صورت تمایل می‌توان آنها را تولید نمود. این نمایه‌ها یا بطور خودکار یا بطور دستی ایجاد می‌شوند. نمایه‌هایی که به صورت خودکار بوجود می‌آیند شامل نمایه‌های زیر می‌باشند. برای تهیه این نمایه‌ها باید کلمات مورد نظر خود را در فایل MyWord.tex قرار دهید (بینید ۲۰).

(آ) \Nemadha: دستور قرار دادن لیست نمادهای اختصاری استفاده شده در متن

(ب) \NamayehFaToEn: دستور قرار دادن دیکشنری فارسی به انگلیسی

(ج) \NamayehEnToFa: دستور قرار دادن دیکشنری انگلیسی به فارسی

(د) \abbreviation: دستور قرار دادن نمایه فهرست کلمات مختصر

(ه) \FarsiWords: دستور قرار دادن واژه‌یاب فارسی

(و) \EnglishWords: دستور قرار دادن واژه‌یاب انگلیسی

اما نمایه‌های دستی که می‌توان در این فایل قرار داد به صورت زیر هستند:

(آ) Nemadha_handle.tex: برای وارد کردن نمادها به صورت دستی می‌توانید آنها را در این فایل وارد کنید.

(ب) dic-en2fa_handle.tex: برای وارد کردن دیکشنری انگلیسی به فارسی، کلمات را در این فایل وارد کنید.

(ج) dic-fa2en_handle.tex: برای وارد کردن دیکشنری فارسی به انگلیسی، کلمات را در این فایل وارد کنید.

۲۱. \AbstractEnglish: توسط این دستور، چکیده انگلیسی در فایل رساله قرار داده می‌شود که باید متن آن در فایل Abstract.tex قرار داده شود.

۲۲. \EsalatEnglish: با این دستور، تعهدنامه انگلیسی در فایل رساله قرار داده می‌شود. قسمت‌های لازم در این قسمت، در فایل Jeld.tex تکمیل می‌گردد. این قسمت نیز پس از دفاع، باید امضا شده و قبل از تحویل به کتابخانه، اسکن آن در فایل قرار داده شود.

۲۳. \DefenceEnglish: توسط این دستور، صورتجلسه دفاع انگلیسی در فایل رساله قرار می‌گیرد. قسمت‌های لازم در این قسمت، در فایل Jeld.tex تکمیل می‌گردد. این صفحه نیز به همراه صورتجلسه دفاع فارسی، باید به نماینده تحصیلات تکمیلی داده شود. درصد کنار این دستور نیز می‌تواند تا قبل از مشخص شدن نماینده تحصیلات تکمیلی برداشته نشود.

۲۴. JeldEnglish\ : توسط این دستور، پشت جلد در فایل رساله قرار داده می‌شود. قسمت‌های لازم در این قسمت، در فایل Jeld.tex تکمیل می‌گردد. علامت درصد کنار این دستور نیز تا زمان تحویل رساله به گروه نباید برداشته شود.

۲.۰ نحوه تولید نمایه‌های مختلف در قالب دانشگاه گیلان

به دو صورت مختلف می‌توان در این قالب نمایه‌ها را تولید کرد: اتوماتیک و دستی.

۱.۲.۰ تولید نمایه اتوماتیک

اگر ورژن تکس لایو شما بیشتر از ۲۰۱۵ باشد، می‌توانید از بسته glossary برای تهیه واژه‌نامه استفاده کنید.

۱.۱.۲.۰ وارد کردن کلمات

در ابتدا، واژه‌هایی را که می‌خواهید در نمایه (دیکشنری‌ها، واژه‌یاب‌ها و ...) قرار بگیرند در فایلی که با نام MyWords.tex وجود دارد، وارد کنید. از سه دستور زیر برای ورود واژه‌ها استفاده می‌شود.

۱. برای کلماتی که در واژه‌یاب یا دیکشنری فارسی به انگلیسی و برعکس قرار می‌گیرند از دستور \newword با چهار آرگومان ورودی به صورت زیر استفاده شده است:

```
\newword{label}{english of word}{persian of word}{purple of  
persian}
```

\newword{spp}{Saddle point problem}{مسئله نقطه زینی}{مسائل نقطه زینی}

\newword{gr}{Group}{گروه}{گروه‌ها}

\newword{per}{Preconditioning}{پیش شرط‌سازی}{}

\newword{op}{Optimization}{بهینه‌سازی}{}

\newword{poem}{Poem}{اشعار}{شعر}

آرگومان اول، عبارتی است که توسط آن کلمه مورد نظر را فراخوانی می‌کنید که در اصل همان برچسب واژه است. عبارت دوم معادل انگلیسی آن است که در فهرست مطالب قرار می‌گیرد. عبارت سوم فارسی این کلمه است که در فهرست قرار می‌گیرد و عبارت چهارم جمع فارسی آن می‌باشد. (اگر کلمه‌ای دارای جمع نبود آن را باید خالی بگذارید). البته دقت کنید که به دلیل فارسی نویسی آکولادهای سوم و چهارم با هم جابجا می‌شوند که در ظاهر چنین است ولی در اصل در آکولاد سوم مفرد کلمه و در آکولاد چهارم جمع آن قرار گرفته است (شکل ۱).

به طور مثال اگر در فایل tex بنویسید:

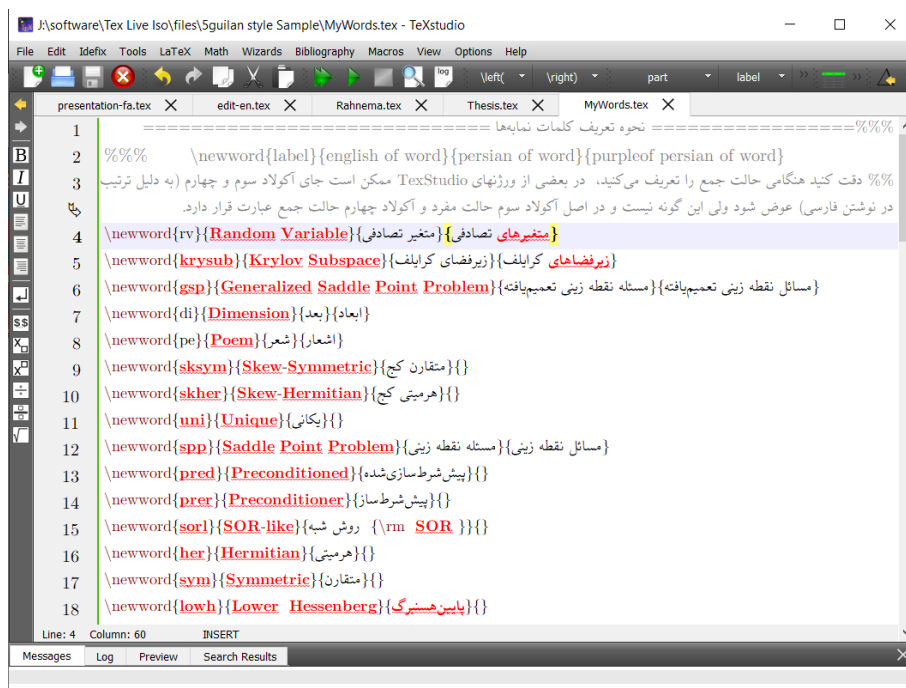
\gls{spp} یکی از مسائل کاربردی می‌باشد.

آنگاه خروجی شما در فایل پی‌دی‌اف به صورت:

”مسئله نقطه زینی^۱ یکی از مسائل کاربردی می‌باشد.“

خواهد بود و اگر در فایل tex بنویسید:

¹Saddle Point Problem



شکل ۱: نحوه قرار دادن کلمات در فایل MyWords دیکشنری‌ها

” $\backslash\text{glspl}\{\text{spp}\}$ دارای کاربردهای مختلفی در علوم مختلف می‌باشند.“

آنگاه خروجی شما در فایل پی‌دی‌اف به‌صورت:

”مسائل نقطه زینی دارای کاربردهای مختلفی در علوم مختلف می‌باشند.“

خواهد بود.

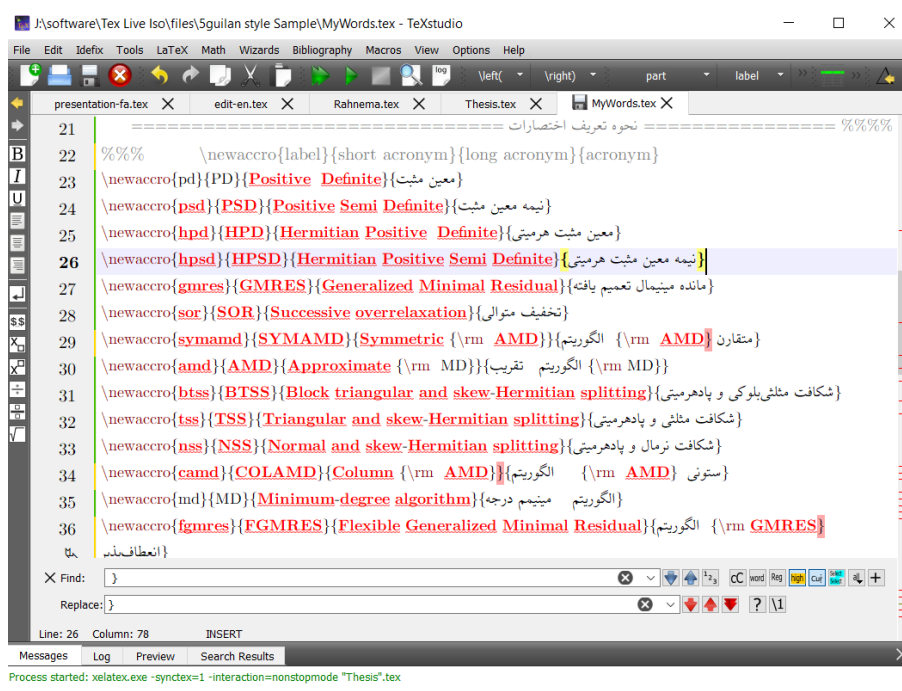
۲. کلمات اختصاری (خلاصه شده) که در فهرست اختصارات قرار می‌گیرند، توسط دستور `\newacro` با چهار آرگومان ورودی به صورت

```
\newacro{label}{short acronym}{long acronym}{persian acronym}
```

ذخیره می‌شوند.

```
\newacro{psd}{PSD}{Positive semi-definite}{معین مثبت}
\newacro{hpd}{HSD}{Hermitian Positive definite}{نیمه معین مثبت هرمیتی}
\newacro{gmres}{GMRES}{Generalized Minimal Residual}{مانده مینیمال تعمیم یافته}
```

آرگومان اول برچسب، آرگومان دوم مخفف کلمه که در متن ظاهر می‌شود و آرگومان سوم، باز شده انگلیسی که در پانویس قرار می‌گیرد و آرگومان چهارم معادل فارسی کلمه است در صفحه اختصارات قرار می‌گیرد (شکل ۲).



شکل ۲: نحوه قرار دادن کلمات در فایل MyWords اختصارات

به طور مثال اگر در فایل `.tex` بنویسید:

”می‌توان از روش `\gls{gmres}` برای حل دستگاه‌های مختلف استفاده کرد“

آنگاه خروجی شما در فایل پی‌دی‌اف به صورت:

”می‌توان از روش مانده مینیمال تعمیم یافته^۱ (GMRES) برای حل دستگاه‌های مختلف استفاده کرد.“

¹Generalized Minimal Residual

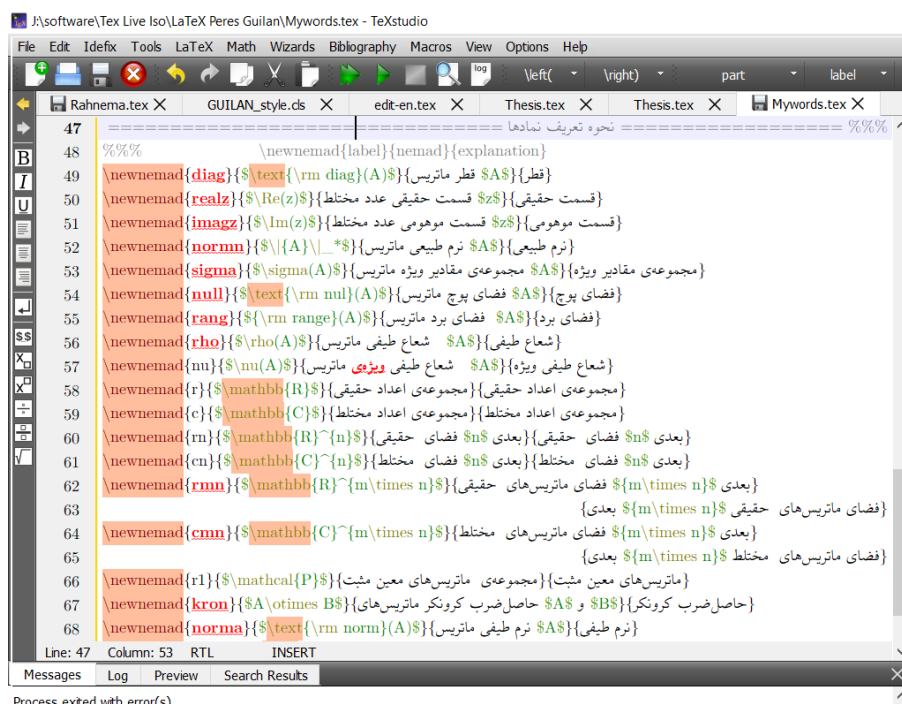
خواهد بود.

واژه‌هایی که در فهرست اختصارات و واژه‌نامه‌ها قرار می‌گیرند، در اولین جایی که در متن ظاهر شوند، برای آنها پانویس قرار می‌گیرد و نیاز نیست بررسی شوند که اولین مرتبه در کجا استفاده شده‌اند. همچنین اگر لازم شد که معادل فارسی یک عبارت انگلیسی که در بین این واژه‌هاست تغییر کند، کفایت فقط معادل فارسی آن در این لیست تغییر کند و نیاز به تغییر و جستجوی آن در کل متن نمی‌باشد.

۳. نمادهایی که در متن استفاده می‌شوند در صفحه نمادهای اختصاری قرار می‌گیرند. این نمادها با دستور `\newnemad` که یک دستور با چهار آرگومان ورودی است، به صورت

```
\newnemad{label}{nemad in index}{explanation in index}{explanation in text}
```

ذخیره می‌شوند. آرگومان اول برچسب، آرگومان‌های دوم و سوم در نمایه نمادهای اختصاری قرار می‌گیرند و به ترتیب نماد مورد نظر و توضیح نماد می‌باشند. آرگومان چهارم متنی مربوط به نماد است که در متن قرار می‌گیرد (شکل ۳).



شکل ۳: نحوه قرار دادن کلمات در فایل MyWords نمادها

به طور مثال اگر در فایل `tex` بنویسید

” $\text{null}(A)$ نشان‌دهنده $\text{gls}\{\text{null}\}$ ماتریس A است و $\text{gls}\{\rho\}$ ماتریس B را نشان می‌دهد.“

آنگاه خروجی شما در فایل پی‌دی‌اف برابر

” $\text{null}(A)$ نشان‌دهنده فضای پوچ ماتریس A است و $\sigma(B)$ مجموعه‌ی مقادیر ویژه ماتریس B را نشان می‌دهد.“

خواهد بود و در صفحه مربوط به نمایه اختصارات جلوی کلمه ” $\text{null}(A)$ “ عبارت

” فضای پوچ ماتریس A “

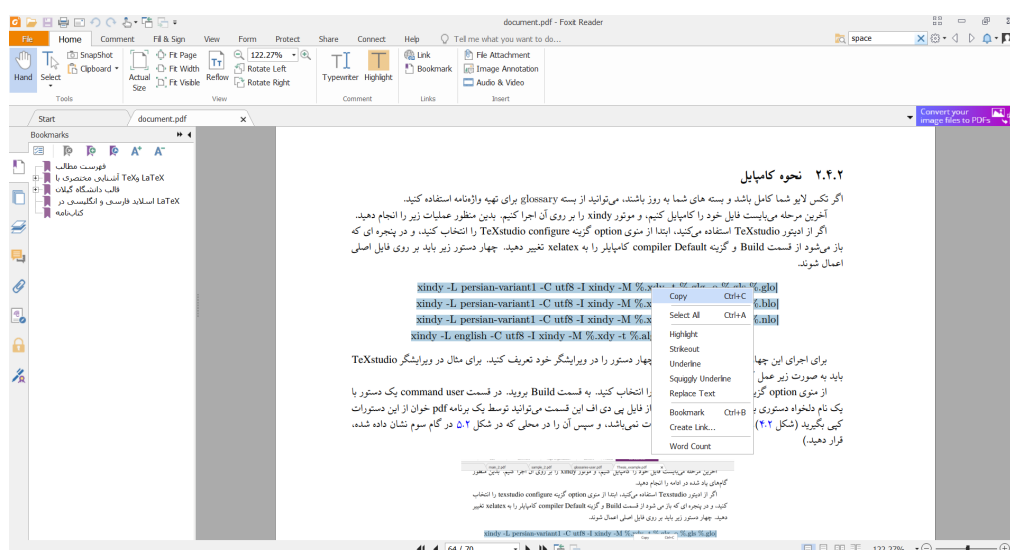
نوشته می‌شود.

۲.۱.۲.۰ اجرای xindy و نمایش کلمه در نمایه

پس از وارد کردن کلمات در فایل MyWords، فایل خود را اجرا کنید و سپس موتور xindy را بر روی فایل اجرا کنید. برای این منظور باید چهار دستور زیر بر روی فایل اصلی اعمال شوند.

```
xindy -L persian-variant1 -C utf8 -I xindy -M %.xdy -t %.glg -o %.gls %.glo|
xindy -L persian-variant1 -C utf8 -I xindy -M %.xdy -t %.blg -o %.bls %.blo|
xindy -L persian-variant1 -C utf8 -I xindy -M %.xdy -t %.nlg -o %.nls %.nlo|
xindy -L english -C utf8 -I xindy -M %.xdy -t %.alg -o %.als %.alo
```

۱. برای این امر از فایل pdf دستورات بالا کپی بگیرید (شکل ۴))



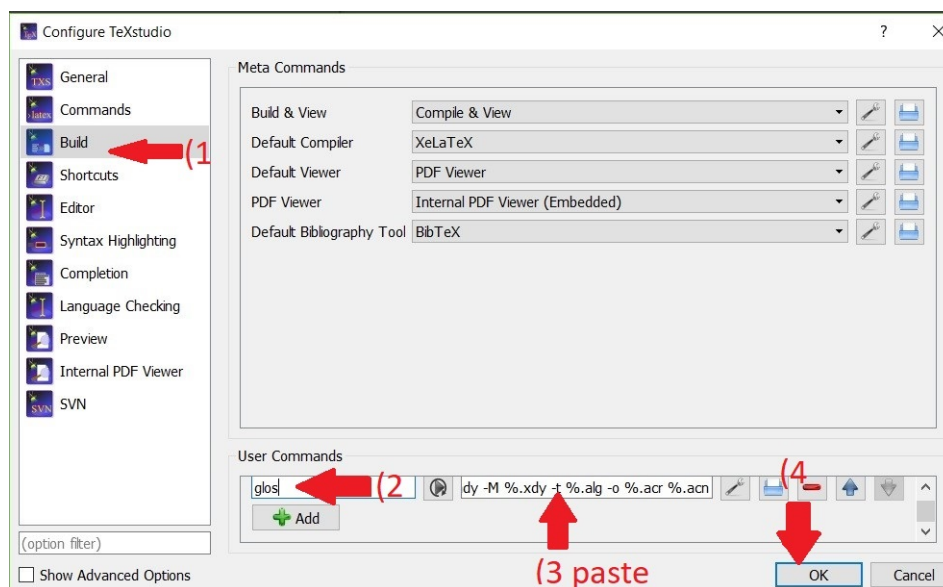
شکل ۴: کپی کردن دستورات

۲. در نرم افزار TexStudio، از منوی Option گزینه Configure TexStudio را انتخاب کنید، و در پنجره ای که باز می شود از قسمت Build و گزینه Default Compiler کامپایلر را به XeLatex تغییر دهید و در قسمت User Commands یک نام را برای این دستورات انتخاب کنید و این دستورات را در مقابل این دستور و در محلی که در شکل ۵ در گام سوم نشان داده شده، قرار دهید.

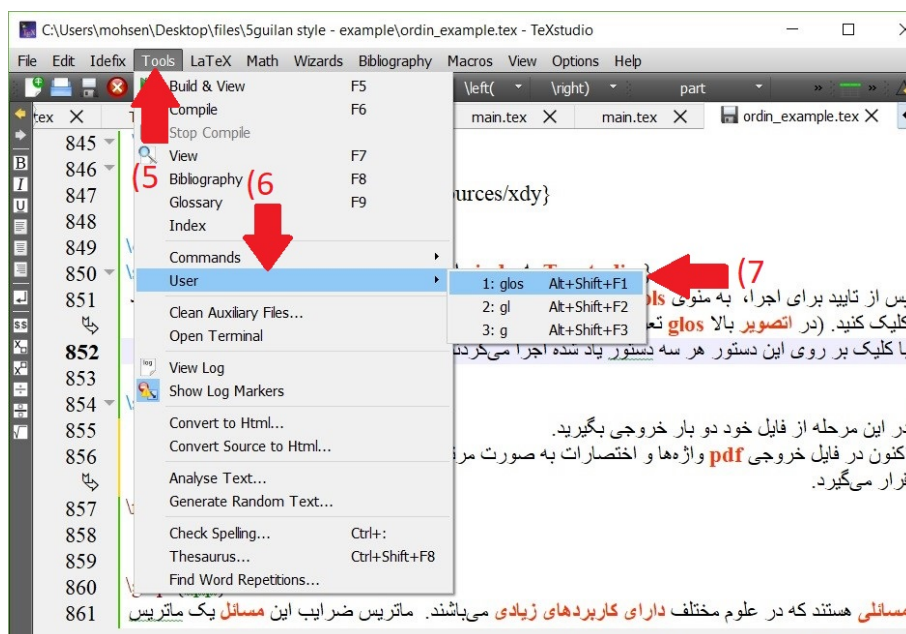
۳. پس از تایید برای اجرا، به منوی tools و قسمت users رفته و در آن جا بر روی دستوری که تعریف کردید کلیک کنید (در تصویر ۵ آن را glos تعریف کردیم). با کلیک بر روی این دستور هر چهار دستور یاد شده اجرا می گردند. (شکل ۶)

۴. فایل خود را یک بار اجرا کنید تا کلماتی که در متن استفاده شده اند، در نمایه ها قرار گیرند.

اکنون در فایل خروجی، واژه ها و اختصارات به صورت مرتب شده در واژه نامه و فهرست اختصارات قرار می گیرند. اگر در صفحه نمایه ها فقط صفحه سفید وجود دارد به این دلیل است که یا دستورات به درستی وارد نشده اند و یا گام ۳ اجرا نشده است. خروجی نمایه های تولید شده به صورت شکل ۷ می باشد.



شکل ۵: قرار دادن دستورات



شکل ۶: اجرای دستور gloss و قرار گرفتن کلمات در نمایه‌ها

۳.۱.۲.۰ فراخوانی‌های متفاوت

برای فراخوانی کلمات باید از دستورهایی زیر استفاده کرد.

۱. برای وارد کردن مفرد فارسی واژه در متن از دستور $\text{\gls{labelname}}$ و برای وارد کردن جمع فارسی واژه در متن از دستور $\text{\glspl{labelname}}$ استفاده می‌شود. با این دستورات زمانی که عبارت برای اولین بار در متن ظاهر می‌شود پاورقی می‌خورد (نمادها پاورقی نمی‌خورند). علاوه بر آن، واژه مورد نظر در نمایه (واژه‌نامه، فهرست اختصارات یا فهرست نمادها) قرار می‌گیرد.

<p>واژه باب فارسی</p> <p>۱ آنتن ۲-۱۵</p> <p>۲ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۳ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۴ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۵ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۶ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۷ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۸ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۹ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۰ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۱ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۲ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۳ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۴ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۵ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۶ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۷ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۸ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۹ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۰ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۱ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۲ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۳ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۴ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۵ بهانه ۲-۱۵</p>	<p>واژه نامه فارسی به انگلیسی</p> <p>۱ آنتن ۲-۱۵</p> <p>۲ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۳ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۴ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۵ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۶ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۷ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۸ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۹ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۰ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۱ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۲ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۳ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۴ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۵ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۶ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۷ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۸ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۱۹ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۰ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۱ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۲ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۳ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۴ بهانه ۲-۱۵</p> <p>۲۵ بهانه ۲-۱۵</p>	<p>واژه نامه انگلیسی به فارسی</p> <p>A آنتن ۲-۱۵</p> <p>B بهانه ۲-۱۵</p> <p>C بهانه ۲-۱۵</p> <p>G بهانه ۲-۱۵</p> <p>Group ۲-۱۵</p> <p>M بهانه ۲-۱۵</p> <p>O بهانه ۲-۱۵</p> <p>P بهانه ۲-۱۵</p> <p>Precondition ۲-۱۵</p> <p>R بهانه ۲-۱۵</p> <p>S to ۲-۱۵</p> <p>Schle Pater Problem ۲-۱۵</p> <p>Schle ۲-۱۵</p> <p>T بهانه ۲-۱۵</p> <p>X بهانه ۲-۱۵</p>
--	--	--

نمادهای اختصاری

A (B) [1]	حاصل ضرب گزینش ماتریسهای A و B
all(A) [1, 2]	همه اجزای خروجی ماتریس A
B* [1]	همه اجزای مقیاس به بعدی [1]
[A] [1]	نوع طیفی ماتریس A

فهرست اختصارات

G	Gauss Generalized Minimal Residual
I	IPSS Integer Positive Definite and
P	IPSS Integer Positive Definite and
P	IPSS Integer Positive Definite and
P	IPSS Integer Positive Definite and

شکل ۷: نمایه های اتوماتیک

۲. اگر برای وارد کردن مفرد فارسی واژه ای از دستور $\text{\gls*{labelname}}$ یا برای وارد کردن جمع فارسی واژه ای از دستور $\text{\glspl*{labelname}}$ استفاده کنید، آن واژه برای اولین بار که در متن ظاهر شود پاورقی نمی خورد، اما در واژه نامه ها قرار می گیرد. به عنوان مثال اگر عبارتی در توضیحات مربوط به شکل ها یا جدول ها باشد، برای اولین بار در فهرست مربوط به شکل ها یا جداول ظاهر می شوند و اگر برای این واژه ها از دستورات \gls و \glspl استفاده شود، در آن صفحه فهرست پاورقی می خورند که مطلوب نیست. بنابراین برای کلماتی که در توضیحات شکل، الگوریتم و یا جدول می آیند باید از $\text{\gls*{labelname}}$ استفاده شود.

۳. اگر برای وارد کردن مفرد فارسی واژه ای از دستور \glsentrytext یا برای وارد کردن جمع فارسی واژه ای از دستور \glsentryplural استفاده شود، آن واژه برای اولین بار که در متن ظاهر شود پاورقی نمی خورد و در واژه نامه ها نیز قرار نمی گیرد.

۴. اگر از دستور \glsuse استفاده کنید، واژه و یا اختصار در متن نمی آید اما در واژه نامه و یا فهرست اختصارات وارد می شود.

مثال ۴.۱.۲.۰

برای وارد کردن جمع یک واژه باید از دستور `\glspl` استفاده نمود. مثل واژه متغیرهای تصادفی^۱ که برای وارد کردن واژه از دستور

```
\glspl{rv}
```

استفاده شده است. ضمناً در اولین استفاده از این واژه، معادل انگلیسی آن نیز پاورقی خورده است. اگر این کلمه جز کلمات اختصاری بود، اختصار آن نیز در پرانتز نوشته می‌شد. در کلمات زیر از `\gls*` یا `\glspl*` استفاده شده است:

```
\begin{center}
\gls*{pred}, \gls*{ipss}, \glspl*{di}, \gls*{md}, \glspl*{krysub}.
\end{center}
```

پیش‌شرط‌سازی‌شده، IPSS، ابعاد، MD، زیرفضاهای کرایلف.

اکنون از `\gls` یا `\glspl` استفاده می‌کنیم:

```
\begin{center}
\gls{pred}, \gls{ipss}, \glspl{di}, \gls{md}, \glspl{krysub}.
\end{center}
```

پیش‌شرط‌سازی‌شده، روش PSS ناقص^۲ (IPSS)، ابعاد^۳، الگوریتم مینیمم درجه^۴ (MD)، زیرفضاهای کرایلف^۵.

همانگونه که مشاهده می‌شود، چون برای اولین بار است که از `\gls` یا `\glspl` استفاده می‌شود، همه کلمات پانویس می‌خورند. بعلاوه حالت مخفف نمادهای اختصاری در اولین مرتبه درون پرانتز نوشته می‌شوند و در استفاده‌های بعدی فقط همین حالت مخفف نوشته می‌شود. مجدداً از `\gls` یا `\glspl` استفاده می‌کنیم:

```
\begin{center}
\gls{pred}, \gls{ipss}, \gls{di}, \gls{md}, \glspl{krysub}.
\end{center}
```

پیش‌شرط‌سازی‌شده، IPSS، بعد، MD، زیرفضاهای کرایلف.

از این به بعد، این کلمات فقط به این صورت در متن ظاهر می‌شوند.

¹Random Variable

²Inexact PSS

³Dimension

⁴Minimum-degree algorithm

⁵Krylov Subspace

ورودی: در اینجا به برخی از نمادهای اختصاری مانند $\backslash\mathrm{gls}\{\mathrm{kron}\}$ و $\backslash\mathrm{gls}\{\mathrm{norm}\}$ اشاره می‌کنیم.
خروجی: در اینجا به برخی از نمادهای اختصاری مانند حاصل ضرب کرونگر و نرم طیفی اشاره می‌کنیم.
 پس از عبارت بالا حاصل ضرب کرونگر و نرم طیفی در نمادهای اختصاری قرار می‌گیرند.
ورودی: $\backslash\mathrm{gls}\{\mathrm{null}\}$ ماتریس A را با $\mathrm{null}(A)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

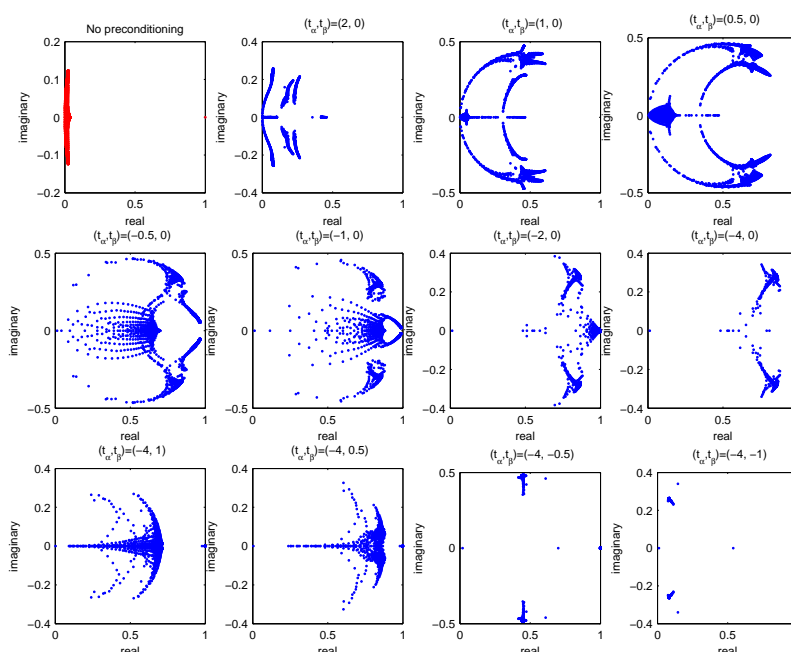
$$\mathrm{null}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

خروجی: فضای پوچ ماتریس A را با $\mathrm{null}(A)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
 در مورد بالا "فضای پوچ" با استفاده از دستور " $\backslash\mathrm{gls}\{\mathrm{null}\}$ " نوشته شده است.

ورودی: $\backslash\mathrm{gls}\{\mathrm{spp}\}$ مسائلی هستند که در علوم مختلف دارای کاربردهای زیادی می‌باشند. ماتریس ضرایب این مسائل یک ماتریس $\backslash\mathrm{gls}\{\mathrm{psd}\}$ می‌باشد.

خروجی: مسائل نقطه زینی مسائلی هستند که در علوم مختلف دارای کاربردهای زیادی می‌باشند. ماتریس ضرایب این مسائل یک ماتریس نیمه معین مثبت^۱ (PSD) می‌باشد.

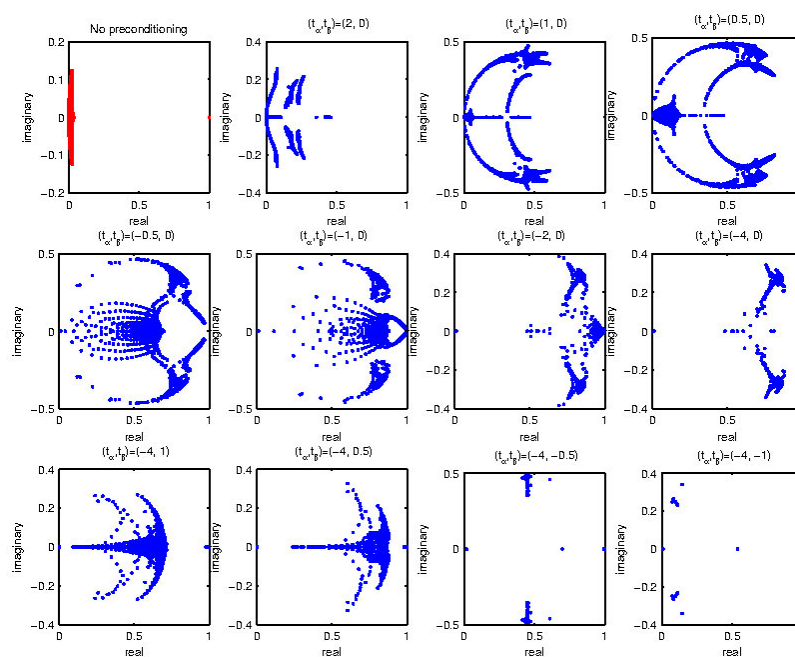
چون psd در بین اختصارات قرار دارد و اینجا برای اولین بار وارد متن می‌شود، حالت اختصار آن در پراوتز قرار می‌گیرد و شکل باز شده انگلیسی در پاورقی ظاهر می‌شود. به ازای شبکه 32×32 و مقادیر متفاوت t_α و t_β ، توزیع مقادیر ویژه \mathcal{P}_{SEPSS}^{-1} در شکل‌های ۸ و ۹ نمایش داده شده است. در شکل ۸



شکل ۸: توزیع مقادیر ویژه ماتریس پیش شرط‌سازی شده \mathcal{P}_{SEPSS}^{-1} .

فهرست شکل‌ها، کلمه پیش شرط‌سازی شده به دلیل استفاده از دستور $\backslash\mathrm{gls}\{*\}$ پاورقی نمی‌خورد. اما در شکل ۹ فهرست شکل‌ها، کلمه "پیش شرط‌سازی شده" به دلیل استفاده از دستور $\backslash\mathrm{gls}$ پاورقی می‌خورد. (فهرست شکل‌ها را ببینید)

¹Positive Semi Definite



شکل ۹: توزیع مقادیر ویژه ماتریس پیش شرط سازی شده $P_{SEPPSS}^{-1}A$.

تا زمانی که واژه و یا اختصاری را در متن با دستورات `\gls` (یا دیگر دستورات در ۳.۱.۲.۰) وارد نشود، واژه نه در متن ظاهر می شود و نه در واژه نامه ها قرار می گیرد.

۲.۲.۰ نمایه‌های دستی

برای تولید نمایه‌ها می‌توان کلمات را مستقیماً در یک فایل وارد کرد و در صفحه نمایه قرار داد. اما اگر نمایه‌ها از این طریق ساخته شوند، برای اولین بار که در متن قرار می‌گیرند، پانویس نمی‌خورند و شماره صفحاتی هم که در آن صفحات قرار گرفته‌اند، مشخص نمی‌شود. همچنین مرتب‌سازی بر حسب حروف الفبا نیز باید به صورت دستی انجام شود.

برای ساختن واژه‌نامه فارسی به انگلیسی فایل `dic-fa2en_handle.tex` را باز کنید و کلمات را به صورت

$$\backslash\text{fagloss}\{\text{english}\}\{\text{persian}\}$$

وارد کنید. دستور `\fahd\{first\}` نیز حرف اول فارسی واژه را وارد می‌کند.

برای ساختن واژه‌نامه انگلیسی به فارسی فایل `dic-en2fa_handle.tex` را باز کنید و کلمات را به صورت

$$\backslash\text{engloss}\{\text{english}\}\{\text{persian}\}$$

وارد کنید. دستور `\enhd\{first\}` نیز حرف اول انگلیسی واژه را وارد می‌کند.

برای وارد کردن نمادهای اختصاری فایل `Nemadha_handle` را باز کنید و واژه‌ها را توسط دستور

$$\backslash\text{gloss}\{\text{nemad}\}\{\text{explanation}\}$$

وارد کنید.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	فهرست نمادهای اختصاری
A Asymptotically stable پایدار محاسمی B Boundary مرز C Connected همبسته Control law کنترلگر Conver hull پوسته‌ی همگرایی E Equilibrium point نقطه‌ی تعادل Estimate of the region of attraction تخمین از ناحیه‌ی جاذبه‌یابی G Gain بهره Globally asymptotically stable پایدار محاسمی سراسری Globally Lipschitz لایپشیتز سراسری Global stabilisation پایدارسازی سراسری I Invariant set مجموعه‌ی پایا K Kronecker product حاصل‌ضرب کرونکر L Locally Lipschitz لایپشیتز محلی Lyapunov function تابع لیاپانوف	A Asymptotically stable پایدار محاسمی B Boundary مرز C Connected همبسته Control law کنترلگر Conver hull پوسته‌ی همگرایی E Equilibrium point نقطه‌ی تعادل Estimate of the region of attraction تخمین از ناحیه‌ی جاذبه‌یابی G Gain بهره Globally asymptotically stable پایدار محاسمی سراسری Globally Lipschitz لایپشیتز سراسری Global stabilisation پایدارسازی سراسری I Invariant set مجموعه‌ی پایا K Kronecker product حاصل‌ضرب کرونکر L Locally Lipschitz لایپشیتز محلی Lyapunov function تابع لیاپانوف	ج حاصل‌ضرب کرونکر ماتریس‌های A و B $A \otimes B$ ع عدد حالت ماتریس A ، وابسته به نرم طیفی $\text{einf}(A)$ ف فشاری موج ماتریس A $\text{einf}(A)$ فشاری جابجایی 10 به‌دلی $10^{\text{einf}(A)}$ فشاری جابجایی 10 به‌دلی $10^{\text{einf}(A)}$ فشاری ماتریس‌های جابجایی 10×10 به‌دلی $10^{\text{einf}(A)}$ فشاری ماتریس‌های جابجایی 10×10 به‌دلی $10^{\text{einf}(A)}$ ی لایپشیتز سراسری R لایپشیتز محلی R ز مجموعه‌ی اعداد حقیقی دشمنی $R \geq 0$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی R مجموعه‌ی اعداد حقیقی C مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت $R > 0$ مجموعه‌ی همه‌ی چندضلعی‌ها یا مربع‌ها جابجایی از ماتریس R R مجموعه‌ی از مجموع مربعات چندضلعی‌ها درجه‌ی ماتریس R $\sum r_i $ ن نرم طیفی ماتریس A $\ A\ _2$

شکل ۱۰: نمایه‌های دستی

۱.۲.۲.۰ نمونه‌های ورودی و خروجی واژه‌ها

واژه‌ها به صورت زیر وارد می‌شوند:

$\backslash\text{fahd}\{\text{م}\}$
 $\backslash\text{fagloss}\{\text{saddle point problem}\}\{\text{مساله نقطه زینی}\}$
 $\backslash\text{fagloss}\{\text{Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting}\}\{\text{شکافت معین مثبت}\}$
 $\{\text{هرمیتی و پاد هرمیتی}\}$
 $\backslash\text{enhd}\{\text{S}\}$
 $\backslash\text{engloss}\{\text{saddle point problem}\}\{\text{مساله نقطه زینی}\}$
 $\backslash\text{engloss}\{\text{Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting}\}\{\text{شکافت معین مثبت}\}$
 $\{\text{هرمیتی و پاد هرمیتی}\}$
 $\backslash\text{fahd}\{\text{ح}\}$
 $\backslash\text{gloss}\{\$A\otimes B\}\{\text{\$A\$ و \$B\$ حاصل ضرب کرونکر ماتریس‌های}\}$
 که خروجی آنها به صورت زیر است:

م

saddle point problem مساله نقطه زینی

ش

Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian . شکافت معین مثبت هرمیتی و پادهرمیتی
Splitting

S

saddle point problem مساله نقطه زینی

H

Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting و شکافت معین مثبت هرمیتی و پادهرمیتی

ح

$A \otimes B$ حاصل ضرب کرونکر ماتریس‌های A و B

۳.۰ فراخوانی یک کد متلب (mfile)

با استفاده از بسته lstlisting و توسط دستور زیر یک کد متلب به نام solve را از پوشه resources فراخوانی می‌کنیم:

```
\begin{latin}
\lstinputlisting[style=matlabstyle]{resources/solve.m}
\end{latin}
```

```
1 function y=solveSEPSS(B,LNp,UNp,pNp,LCpbet,UCpbet,pCpb,x,semi)
2 %Summary of this function goes here
3 %y=inv(SEPSS)x; y=[y1;y2]; x=[x1;x2]
4 m1=size(B,2);
5 x1=x(1:m1,1);x2=x(m1+1:end);
6 if semi==1
7     s2(pCpb,:)=UCpbet\ (LCpbet\ (x2(pCpb)));
8 else
9     s2=gmres(LCpbet*UCpbet,x2);
10 end
11 s1=x1-B'*s2;
12 y1(pNp,:)=UNp\ (LNp\ (s1(pNp)));
13 t2=x2+B*y1;
14 y2(pCpb,:)=UCpbet\ (LCpbet\ (t2(pCpb)));
15 y=[y1;y2];
16 end
```

۴.۰ نمونه محیط‌های ریاضی

مواردی که می‌توانید در این قالب استفاده کنید:

```
\begin{theorem}
This is a theorem
\end{theorem}
\begin{proof}
This is a proof.
\end{proof}
\begin{remark}
remark...
\end{remark}
\begin{lemma}
lemma...
\end{lemma}
\begin{example}
example...
\end{example}
```

قضیه ۱.۰. ۱۲۳۴۵ *This is a theorem*

□

اثبات. ۱۲۳۴۵ *This is a proof.*

تبصره ۲.۰. remark...

لم ۳.۰. lemma...

مثال ۴.۰. example...

نتیجه ۵.۰. ۱۲۳۴۵ *corollary... ==*

گزاره ۶.۰. ۱۲۳۴۵ *proposition...*

نکته ۷.۰. ۱۲۳۴۵ *note...*

تعریف ۸.۰. definition...

لم ۹.۰. lemma...

حدس ۱۰.۰. *conjecture...*

به غیر از این موارد باید خودتان آن را تعریف کنید.

۵.۰ فهرست منابع و ارجاع به آنها

به دو صورت می‌توان مراجع را تولید کرد: با استفاده از Bibtex و بدون استفاده از Bibtex. اکیدا تولید فهرست منابع با استفاده از Bibtex توصیه می‌شود.

۱.۵.۰ نحوه تولید فهرست منابع با استفاده از Bibtex

در این پایان نامه کفایت فرمت bibtex منابع خود را از گوگل اسکولار گرفته و در فایل

MyBibReferences.bib

جایگذاری کنید و با دستور

```
\cite{biblabel}
```

آنها را فراخوانی کنید. biblabel نام برجسب مرجع مورد نظر است. به طور مثال برجسب مرجعی که به صورت

```
@book{brezzi2012,
title={Mixed and hybrid finite element methods},
author={Brezzi, Franco and Fortin, Michel},
volume={15},
year={2012},
publisher={Springer Science \&Business Media}
}
```

در فایل bib قرار گرفته است، عبارت brezzi2012 می باشد و با دستور \cite{brezzi2012} می توان به این منبع ارجاع داد. برجسب مرجع

Listing 1: English reference

```
@article{benzi312009,
title={A generalization of the {Hermitian} and skew-{Hermitian}
splitting iteration},
author={Benzi, Michele},
journal={SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications},
volume={31},
number={2},
pages={360--374},
year={2009},
publisher={SIAM}
}
```

benzi312009 می باشد. برجسب مراجع باید منحصر به فرد باشند. برای مقالات برجسبی به صورت فامیل نویسنده+شماره مجله+سال می باشد و برای کتاب ها به صورت فامیل نویسنده+سال پیشنهاد می شود. در این صورت برجسب ها منحصر به فرد خواهند بود و به محض مشاهده هر منبع، برجسب آن منبع یادآوری می شود. فیلدهای منابع فارسی و انگلیسی در فایل bib یکی هستند و تنها تفاوت آنها در

```
language={persian},
```

است که باید به منابع فارسی اضافه شود.

توجه داشته باشید هنگامی که از Bibtex برای تولید منابع استفاده می کنید، تا زمانی که به منبعی ارجاع ندهید آن منبع در قسمت منابع و مراجع شما ظاهر نمی شود. از این رو شما می توانید منابعی بیش از حد نیاز

خود در فایل MyBibReferences.bib داشته باشید بدون اینکه در فهرست منابع شما ظاهر داشته باشند. پس از قرار دادن منابع در فایل bib، فهرست منابع توسط دستورهایی

```
\bibliographystyle{acm-fa}
\bibliography{MyBibReferences}
```

پدید می‌آید. MyBibReferences نام فایلی است که پسوند آن bib است و منابع و مراجعی که از گوگل اسکولار گرفته‌اید (یا فیلدهای آن منبع را خود تکمیل نموده‌اید) در آن قرار دارد و acm-fa استایل مرتب شدن و نشان دادن منابع و مراجع شماست که یکی از استایل‌های زی‌پرشین است.

۱.۱.۵.۰ مزیت‌های این روش

۱. نیاز به بررسی هر منبعی در متن نمی‌باشد. هر منبع که در متن قرار گیرد در منابع قرار می‌گیرد و هر کدام حذف شود از منابع حذف می‌شود. (توجه داشته باشید که هر یک از منابع که برای اولین در متن قرار گیرد یک کپی از آن در فایلی با پسوند bbl و با نام اصلی فایل‌تان قرار می‌گیرد که باعث می‌شود این منبع در فهرست منابع نشان داده شود. حتی اگر آن منبع نیز حذف شود، آن منبع همچنان در فهرست منابع قرار خواهد داشت. لذا در نسخه نهایی متنتان یک بار باید فایل با پسوند bbl را پاک کنید تا دوباره ساخته شود و منابع اضافی موجود، از فهرست منابع حذف شوند.)

۲. همه منابع را می‌توان در عرض چند ثانیه به یک فرمت خاص (فقط با داشتن یک فایل با پسوند bst) مرتب نمود و لازم نیست که هر یک از منابع جداگانه و به صورت تک تک مرتب شوند. این مرتب‌سازی می‌تواند: به ترتیب ظاهر شدن منابع در متن باشد یا ترتیب حروف الفبایی نویسندگان. ایتالیک کردن قسمت‌های مختلف و یا قرار دادن پرانتز برای قسمت‌های خاص. اخیراً هر مجله‌ای یک فرمت با پسوند bst. برای خود در نظر گرفته است که منابع و مراجع خود را توسط آن مرتب می‌کند که می‌توان از آنها استفاده نمود. شکل خروجی منابع این متن، یکی از نمونه‌های از پیش تعریف شده در زی‌پرشین می‌باشد (acm-fa.bst). البته در این فرمت منابع فارسی در انتهای فهرست قرار می‌گیرد (برای قرار دادن مراجع و منابع فارسی در ابتدای آن، نیز می‌توان مطابق زیربخش ۲.۱.۵.۰ عمل نمود).

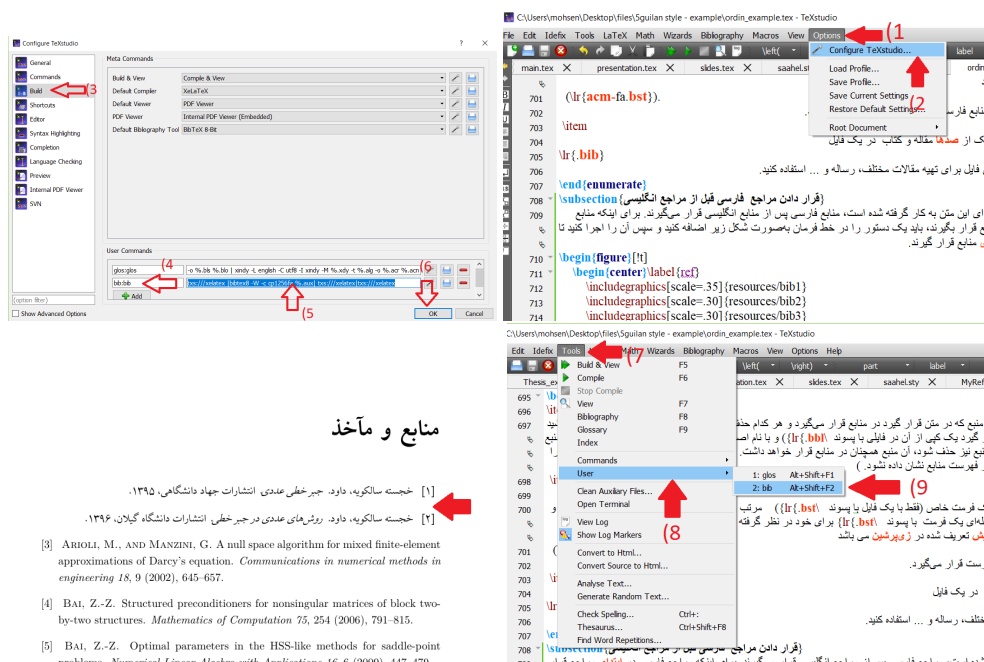
۳. شما می‌توانید یک بانک از صدها مقاله و کتاب در یک فایل bib داشته باشید که از این فایل برای تهیه مقالات مختلف، رساله و ... استفاده کنید. همچنین این فایل را می‌توانید به کسانی که مراجع آنها با مراجع شما اشتراک دارند، انتقال دهید.

۲.۱.۵.۰ قرار دادن مراجع فارسی قبل از مراجع انگلیسی

در فایل استایلی که برای این متن به کار گرفته شده است، منابع فارسی پس از منابع انگلیسی قرار می‌گیرند. برای اینکه منابع فارسی در ابتدای منابع قرار بگیرند، باید دستور

```
txs:///xelatex | bibtex8 -W -c cp1256fa %.aux | txs:///xelatex | txs:///xelatex
```

را در خط فرمان به صورت شکل ۱۱ اضافه کنید و سپس آن را اجرا کنید تا منابع فارسی در ابتدای منابع قرار گیرند (نیازی به نوشتن دستور بالا نیست. کافایت این دستور را از فایل پی‌دی‌اف این قسمت کپی کنید).



شکل ۱۱: قرار دادن منابع و مراجع فارسی در ابتدای منابع

۳.۱.۵.۰ نمونه‌هایی از مراجع

در ادامه نمونه‌های مختلفی از مراجع را ملاحظه می‌کنید:

[۹۰] یک مقاله فارسی چاپ شده در مجله،

[۸۴] یک کتاب فارسی،

[۸۶] یک مقاله کنفرانسی داخلی،

[۹۱] یک پایان‌نامه ارشد فارسی،

[۸۵] یک پایان‌نامه دکتری فارسی،

[۸۹] یک منبع اینترنتی فارسی (متفرقه)،

[۱] یک مقاله انگلیسی چاپی،

[۱۸] یک مقاله انگلیسی الکترونیکی،

[۵۰] یک کتاب انگلیسی،

[۲] یک مقاله کنفرانسی خارجی،

[۵۷] یک پایان‌نامه ارشد انگلیسی،

[۲۷] پایان‌نامه دکتری انگلیسی و

[۷۴] یک مقاله انگلیسی از یک مجموعه مقالات

است.

۴.۱.۵.۰ نکته مهم

مراجعی که توسط این روش در فهرست منابع قرار می‌گیرند، در فایل با پسوند bbl ذخیره می‌شوند و تمام منابعی که در این فایل قرار دارند، در فهرست منابع نشان داده می‌شوند. لذا اگر منبعی از متن حذف شود،

همچنان در فهرست منابع نشان داده می‌شود. بنابراین پس از تایپ کامل پایان‌نامه، یک بار فایلی را که دارای پسوند bbl است پاک کنید تا دوباره تولید شود و منابع اضافی که در فهرست منابع قرار گرفته‌اند، حذف شوند.

۲.۵.۰ نحوه تولید فهرست منابع بدون Bibtex

اگر مراجع بدون bibtex در مراجع قرار داده شوند، این برچسب‌ها با دستور \bibitem \ قرار داده می‌شوند. به عنوان مثال یک مرجع به صورت

```
\bibitem{Bai1022005}
```

Bai Z.-Z., Parlett B.N., Wang Z.-Q., On generalized successive overrelaxation methods for augmented linear systems, Numerische Mathematik, 102, (2005), 1–38.

در فهرست مراجع قرار می‌گیرد که عبارت Bai۱۰۲۲۰۰۵ برچسب این مرجع می‌باشد. برای دیدن نحوه نوشتن منابع و مراجع فارسی و انگلیسی فایل references.tex را در قالب دانشگاه گیلان ببینید. قبل از همه منابع فارسی باید از دستور \persian و قبل از همه منابع انگلیسی دستور \latin استفاده کرد. همه منابع باید در بین دو دستور \begin{thebibliography}{99} و \end{thebibliography} قرار بگیرند.

Listing 2: References without bibtex

```
\begin{thebibliography}{99}
\persian

persian references

\latin
\bibitem{Bai1022005}
Bai Z.-Z., Parlett B.N., Wang Z.-Q., On generalized successive
overrelaxation methods for augmented linear systems,
\emph{Numerische Mathematik}, 102, 1 (2005), 1--38.
\bibitem{saad2003}
Saad Y. \emph{Iterative methods for sparse linear systems},
volume 82. SIAM, 2003.
\end{thebibliography}
```

پیش‌گفتار

حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{u}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ و $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، یکی از مسائل مهم در جبر خطی عددی می‌باشد. چنین مسأله‌ای در اغلب شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی شامل: زیست‌شناسی، مهندسی فیزیک، مهندسی برق، راه و ساختمان، ارتعاشات و ... ظاهر می‌گردد که مشترک‌ترین منبع مسائل فوق، جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در کاربردهای عملی، حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، معمولاً به روش عددی و توسط گسسته‌سازی از طریق روش تفاضلات متناهی یا عناصر متناهی می‌باشد که منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت (1) می‌گردد. جواب دستگاه معادلات خطی (1)، یک جواب تقریبی معادله دیفرانسیل خواهد بود.

روش‌های مختلفی برای حل یک دستگاه معادلات خطی وجود دارد که به دو دسته روش‌های مستقیم و غیرمستقیم (تکراری) تقسیم می‌شوند. در روش‌های مستقیم، جواب دستگاه (1)، به صورت مستقیم و در تعداد متناهی عمل حسابی بدست می‌آید که می‌تواند از طریق محاسبه تجزیه LR یا چولسکی¹، محاسبه تجزیه QR، محاسبه وارون، قاعده کرامر²، روش حذفی گاوس³ یا گاوس-جردن⁴ و ... صورت پذیرد. محاسبه وارون و استفاده از قاعده کرامر، برای ماتریس‌های با ابعاد بزرگ اکیدا توصیه نمی‌شود. زیرا حجم محاسبات در این روش‌ها به شدت افزایش می‌یابد. همچنین، برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب تنک و با ابعاد بزرگ، مگر در موارد خاصی، هیچ یک از روش‌های بالا قابل استفاده نخواهند بود. زیرا به دلیل فرایند خاص آنها، غالباً مجبور به ذخیره تعداد درایه‌های ناصفر بیشتری، نسبت به خود ماتریس \mathbf{A} خواهیم بود که باعث افزایش میزان حافظه برای ذخیره‌سازی آنها، افزایش تعداد محاسبات و در نتیجه افزایش خطای محاسباتی خواهد شد. اما در روش‌های تکراری، به ازای یک بردار اولیه $\mathbf{u}^{(0)}$ ، دنباله‌ای از بردارها به صورت $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ ، توسط یک رابطه بازگشتی مانند

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{G}_k \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}^{(k)}, \quad (2)$$

که در آن $\mathbf{c}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ وابسته به بردار $\mathbf{u}^{(k)}$ می‌باشند، به گونه‌ای تولید می‌شوند که این دنباله به جواب دستگاه معادلات (1) همگرا شود. هر چند که ممکن است به دلیل افزایش تعداد محاسبات و انباشتگی خطای متأثر از خطای گرد کردن و ... دستیابی به جوابی با دقت بسیار ناچیز مقدور نباشد. اما به هر حال، بسته به روش انتخابی برای حل دستگاه و نوع ویژه ماتریس ضرایب آن، می‌توان تقریبی از جواب مسأله را تا

¹Cholesky

²Cramer

³Gauss

⁴Gauss-Jordan

حدی محاسبه نمود.

بسته به نوع ماتریس تکرار G_k ، روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی (۱) به دو دسته کلی روش‌های تکراری ایستا و روش‌های تکراری پویا (غیرایستا) تقسیم می‌شوند. در روش‌های تکراری ایستا، ماتریس تکرار G_k همواره ثابت است، در صورتی که در روش‌های تکراری پویا، ماتریس تکرار G_k وابسته به بردار $u^{(k)}$ بوده و در هر گام به گونه‌ای تغییر پیدا می‌کند تا بردار جدید به دست آمده، که معمولاً از یک مینیمم‌سازی روی یک فضا حاصل می‌شود، یک تقریب بهتر نسبت به بردار قبل، برای جواب دستگاه (۱) باشد. روش‌های تکراری گاوس-سایدل^۱، ژاکوبی^۲، ریچاردسون^۳، تخفیف متوالی^۴ (SOR) و ... نمونه‌هایی از روش‌های تکراری ایستا و روش‌های زیرفضای کرایلِف مانند گرادیان مزدوج، سریعترین کاهش و ... نمونه‌هایی از روش‌های تکراری پویا می‌باشند. همگرایی این روش‌ها وابسته به نوع ماتریس ضرایب دستگاه می‌باشد و هیچ‌کدام از این روش‌ها در حالت کلی همگرا نیستند. به‌عنوان مثال، همگرایی روش‌های گاوس-سایدل، ژاکوبی و SOR، برای دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب قطر غالب و روش‌های تکراری ریچاردسون، گرادیان مزدوج و سریعترین کاهش، برای دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب معین مثبت هرمیتی به اثبات رسیده است. البته همگرایی برخی از این روش‌ها برای حالات دیگر نیز بررسی شده است. یکی از روش‌های تکراری پویا که برای حل یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب دلخواه نامنفرد به کار می‌رود، روش GMRES می‌باشد که توسط سعد^۵ و شولز^۶ در [۶۵] معرفی شده است. پیرامون همگرایی این روش برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب منفرد نیز در [۳۰]، توسط برون^۷ و واکر^۸، نتایجی به دست آمده است. سرعت همگرایی این روش، وابسته به درجه چندجمله‌ای مینیمال ماتریس ضرایب می‌باشد و اگر این مقدار برابر با m باشد، آنگاه دنباله برداری که توسط این روش تولید می‌شود، حداکثر در m تکرار با محاسبه دقیق، به جواب دستگاه معادلات خطی دست پیدا می‌کند. در حالت کلی، سرعت همگرایی روش GMRES به خوشه بودن مقادیر ویژه ماتریس ضرایب بستگی دارد. هر چه تعداد بیشتری از مقادیر ویژه ماتریس ضرایب، حول نقطه‌ای به دور از نقطه $(0, 0)$ جمع شده باشند، سرعت همگرایی روش GMRES نیز بیشتر خواهد بود [۲۰]. بدین منظور، می‌توان با پیش ضرب یک ماتریس نامنفرد مانند P ، به دو طرف رابطه (۱) یک دستگاه معادلات خطی جدید به صورت

$$P^{-1}Au = P^{-1}b, \quad (3)$$

پدید آورد که معادل دستگاه (۱) است. ماتریس P را ماتریس پیش‌شرط‌ساز^۹ و این دستگاه معادلات را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده می‌گوییم.

مزیت حل این دستگاه نسبت به حل دستگاه (۱)، آن است که می‌توان ماتریس P را به گونه‌ای انتخاب نمود تا مقادیر ویژه ماتریس ضرایب آن، در نقطه‌ای به دور از نقطه $(0, 0)$ و در اطراف یک نقطه مانند $(1, 0)$ خوشه شوند و از این طریق، سرعت همگرایی روش GMRES برای به دست آوردن جواب دستگاه معادلات خطی (۱) بهبود پیدا کند. یک انتخاب برای ماتریس P خود ماتریس A می‌باشد، اما از آنجا که محاسبه وارون ماتریس برای مسائل با ابعاد بزرگ بسیار پرهزینه است، همواره تقریبی از ماتریس A به عنوان پیش‌شرط‌ساز،

¹Gauss-Seidel

²Jacobi

³Richardson

⁴Successive overrelaxation

⁵Saad

⁶Schultz

⁷Brown

⁸Walker

⁹Preconditioner

برای این گونه مسائل، در نظر گرفته می‌شود. به علاوه، از آنجا که در الگوریتم روش GMRES به محاسبه ضرب ماتریس ضرایب دستگاه در بردار نیاز می‌باشد، لذا ماتریس P باید به گونه‌ای انتخاب گردد که حل یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب P نیز به سهولت انجام پذیرد.

بر این اساس، روش‌های تکراری و پیش‌شرط‌سازهای مختلفی برای حل دستگاه معادلات خطی معرفی شده‌اند. یکی از این روش‌ها، روش شکافت معین مثبت هرمیتی و پاد هرمیتی^۱ (HSS) می‌باشد که برای اولین بار توسط بای^۲ و همکاران در [۱۱] برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت غیر هرمیتی معرفی گردید و سپس پیش‌شرط‌ساز HSS توسط این روش تکراری تولید شد. در [۱۱] نشان داده شده که این روش بدون هیچ شرطی، به تنها جواب دستگاه معادلات خطی معین مثبت غیر هرمیتی، همگراست. به دلیل خواص جالب و کارآمد این روش، همواره مورد توجه بسیاری از افراد بوده و نمونه‌های مختلفی از آن معرفی شده است. بطور مثال، روش HSS ناقص^۳ (IHSS) برای کاهش میزان استفاده از حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی در روش HSS ارائه شده است [۱۱]. روش HSS بهبودیافته^۴ (MHSS) در [۷] برای حل دستگاه‌های مختلط متقارن، توسط بای و بنزی به دست آمده است. یک تعمیم از روش HSS^۵ (GHSS) در [۲۱] معرفی شده است. همچنان نمونه‌های مختلفی از این روش برای حل دستگاه‌های معادلات خطی گوناگون استفاده می‌شود [۶۷، ۸۳]. روش شکافت معین مثبت و پاد هرمیتی^۶ (PSS) توسط بای و همکاران در [۱۰] برای حل دستگاه‌های خطی معین مثبت غیر هرمیتی معرفی شده است که تعمیمی از روش HSS می‌باشد. سپس پیش‌شرط‌ساز PSS توسط این روش به دست آمد. در [۱۰] نشان داده شد که روش PSS نیز بدون هیچ شرطی، به جواب یکتای دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب معین مثبت غیر هرمیتی، همگراست. تعمیمی از روش PSS^۷ (GPSS) توسط کائو^۸ و همکاران در [۳۵] و بهبودی از آن^۹ (MGPS) در [۵۸] معرفی شده است. روش تکراری انتقال-شکافت و پیش‌شرط‌ساز متناظر با آن نیز توسط بای در [۱۷] برای حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب معین مثبت غیر هرمیتی ارائه شده است. در فصل دوم، روش‌های تکراری و پیش‌شرط‌سازهای دیگری نیز معرفی می‌شوند.

اکنون دستگاه معادلات خطی

$$Au \equiv \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \equiv b, \quad (4)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ معین مثبت غیر هرمیتی، $C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ نیمه معین مثبت غیر هرمیتی، $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m \leq n$)، $f \in \mathbb{C}^n$ و $g \in \mathbb{C}^m$. چنین دستگاه‌هایی را مسائل نقطه زینی تعمیم یافته می‌نامیم. فرض می‌کنیم ماتریس‌های A ، B و C تنک و از ابعاد بزرگ هستند. مسائل نقطه زینی تعمیم یافته دارای کاربردهای متنوعی در علوم و مهندسی، نظیر محاسبه مکانیک سیالات [۳، ۴۳، ۴۴، ۴۶]، تقریب عناصر متناهی آمیخته برای معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی [۲۹، ۶۳، ۷۹]، بهینه‌سازی [۱۹، ۴۷، ۴۸، ۵۱، ۵۶، ۶۰]، کنترل بهینه [۲۵]، تقریب کمترین مربعات [۲۶]، مهندسی برق [۷۷] و ... می‌باشند، برای موارد بیشتر [۴] را ببینید.

¹Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting

²Bai

³Inexact HSS

⁴Modified HSS

⁵Generalization of HSS

⁶Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting

⁷Generalized PSS

⁸Cao

⁹Modified GPSS

اخیرا روش‌های تکراری زیادی برای حل مسائل نقطه زینی (۴) پیشنهاد شده است، مانند روش شبه SOR^۱ [۴۹]، روش SOR تعمیم یافته^۲ (GSOR) [۱۵]، روش اوزاوا^۳ [۲۸]، روش پارامتری اوزاوی ناقص^۴ [۱۶]، روش شکافت هرمیتی و پادهرمیتی [۷۶، ۲۲] و غیره. با این وجود ممکن است روش‌های تکراری ایستا کارایی کمتری نسبت به روش‌های زیرفضای کرایلف داشته باشند [۶۶]. از سوی دیگر، هنگامی که روش‌های زیرفضای کرایلف برای حل مسائل نقطه زینی به کار می‌روند دارای همگرایی کندی هستند. با این وجود، روش‌های تکراری ایستا می‌توانند پیش‌شرط‌سازهای ارزشمندی را برای سرعت بخشیدن همگرایی روش‌های مبتنی بر زیرفضای کرایلف تولید کنند. همانطور که ذکر شد، سرعت همگرایی روش‌های زیرفضای کرایلف وابسته به خوشه بودن مقادیر ویژه ماتریس پیش‌شرط‌شده در اطراف نقطه $(0, 0)$ و به دور از نقطه $(0, 0)$ می‌باشد [۲۰] که این امر با انتخاب پیش‌شرط‌سازهای مناسب تحقق می‌یابد. از این رو، پیش‌شرط‌سازهای مختلفی برای حل مسائل نقطه زینی مانند پیش‌شرط‌سازهای قطری بلوکی [۴۲، ۶۱]، پیش‌شرط‌سازهای مقید [۱۴، ۵۶]، پیش‌شرط‌سازهای مثلثی بلوکی [۳۶، ۷۵، ۸۰]، پیش‌شرط‌سازهای پارامتری مثلثی بلوکی [۵۵]، پیش‌شرط‌سازهای تجزیه هرمیتی و پادهرمیتی [۱۳، ۲۲]، پیش‌شرط‌سازهای تجزیه معین مثبت و پادهرمیتی [۶۲، ۷۲]، پیش‌شرط‌سازهای ابعادی^۵ (DS) [۲۳، ۲۴]، پیش‌شرط‌سازهای انتقال-شکافت^۶ (SS) [۱۷، ۳۲، ۳۳، ۳۹، ۶۸] و غیره ارائه شده‌اند.

بنزی^۷ و گلاب^۸ روش تکراری HSS را برای حل مسائل نقطه زینی به کار گرفتند و نشان دادند که تحت شرایطی روش تکراری HSS بدون هیچ محدودیتی بر روی پارامتر خود، به تنها جواب مسائل نقطه زینی همگراست [۲۲]. به دلیل عملکرد مطلوب و خواص ریاضی جالب، روش تکراری HSS مورد توجه بسیاری شده است. از این رو انواع مختلفی از این روش به همراه خصوصیات آنها بررسی شده است. یک نمونه تسریع شده از روش HSS^۹ که با AHSS نشان داده شده، توسط بای و گلاب در [۹] معرفی شده است. پارامترهای شبه-بهینه و فاکتورهای همگرایی شبه-بهینه برای روش‌های HSS و AHSS در [۵] به دست آمده است. بای و بنزی در [۶] یک نمونه منظم‌شده از روش HSS^{۱۰} را که با نشان داده‌اند، برای مسائل نقطه زینی ارائه داده‌اند. به منظور خواص همگرایی پیش‌شرط‌ساز HSS برای ماتریس‌های غیرهرمیتی [۸] را ببینید. سیمونسینی^{۱۱} و بنزی در [۷۶] کران‌هایی را برای مقادیر ویژه ماتریس پیش‌شرط‌شده مسائل نقطه زینی، زمانی که از پیش‌شرط‌ساز HSS استفاده شود، به دست آورده‌اند. بای و همکاران مقادیر بهینه را برای روش تکراری HSS برای حل دستگاه معادلات بلوکی 2×2 محاسبه نموده‌اند. همچنین چن^{۱۲} [۴۰] و هونگ^{۱۳} [۵۳] دو روش را برای محاسبه پارامترهای بهینه در روش HSS برای مسائل نقطه زینی ارائه کرده‌اند.

در [۶۲]، پن^{۱۴} و همکاران، روش DPSS^{۱۵} را که همان بکارگیری روش PSS برای حل مسائل نقطه زینی است، زمانی که بلوک $(2, 2)$ برابر صفر باشد، ارائه کرده‌اند. سپس شن^{۱۶} از این روش برای حل مسائل نقطه زینی تعمیم‌یافته استفاده کرد [۷۲]. فن^{۱۷} و ژو^{۱۸} در [۴۵] یک تعمیم تعدیل‌یافته از پیش‌شرط‌ساز PSS

¹SOR-like²Generalized SOR³Uzawa⁴Parametrized inexact Uzawa⁵Dimensional splitting⁶Shift-splitting⁷Benzi⁸Golub⁹Accelerated HSS¹⁰Regularized HSS¹¹Simoncini¹²Chen¹³Huang¹⁴Pan¹⁵Deteriorated PSS¹⁶Shen¹⁷Fan¹⁸Zhu

را معرفی کرده‌اند. ژئی^۱ و ما^۲ در [۸۱] روش بهبودیافته PSS را برای مسائل نقطه زینی تعمیم‌یافته پیشنهاد داده‌اند.

فصل بندی این رساله به صورت زیر است. در فصل اول، مفاهیم، تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز در فصل‌های دیگر مرور شده است. در ادامه‌ی این فصل، به عدد شرطی و پیش‌شرط‌سازی پرداخته می‌شود و سپس روش‌های تکراری ایستا و روش‌های زیرفضای کرالیف معرفی می‌شوند. در فصل دوم، چندین روش تکراری به همراه پیش‌شرط‌سازهای آنها مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. سپس روش PSS تعمیم‌یافته^۳ (EPSS)، که آن را با EPSS نشان می‌دهیم، برای حل یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب معین مثبت غیر هرمیتی ارائه و خواص آن، مورد مطالعه قرار داده شده است. همگرایی و نیمه همگرایی این روش برای مسائل منفرد و نامنفرد، بررسی شده است. نشان خواهیم داد که این روش بدون هیچ محدودیتی برای حل دستگاه‌های معین مثبت همگرا خواهد بود. اما هنگامی که این روش برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب نیمه معین مثبت قرار گیرد، همه مقادیر ویژه ماتریس تکرار آن درون و روی دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز (۰, ۰) قرار می‌گیرند و لذا ممکن است در این حالت همگرایی یا نیمه همگرایی وجود نداشته باشد. اما به دلیل خوشه بودن مقادیر ویژه ماتریس تکرار این روش، استفاده از پیش‌شرط‌ساز وابسته به آن، برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب معین یا نیمه معین مثبت غیر هرمیتی مناسب به نظر می‌رسد. تقریبی برای پارامتر بهینه این روش در حالت‌های مختلفی ارائه شده است. با استفاده از یک مثال عددی، حالت‌های خاصی از این روش و رفتار پیش‌شرط‌ساز وابسته به آنها، مورد آزمایش و بررسی قرار خواهند گرفت. در فصل سوم، به مسائل نقطه زینی تعمیم‌یافته می‌پردازیم. شرایط وجود و یکتایی جواب برای این مسائل به دست می‌آید. برخی از کاربردهای عملی این مسائل بازگو می‌شوند. سپس، برخی از روش‌ها و پیش‌شرط‌سازهای مختلفی را که برای حل این‌گونه مسائل معرفی شده‌اند، مورد مطالعه قرار داده و چند روش جدید را برای حل مسائل نقطه زینی (۴) معرفی می‌کنیم. پس از آن، روش EPSS را که در فصل سوم معرفی می‌شود، برای حل مسائل نقطه زینی تعمیم‌یافته به کار می‌گیریم و همگرایی و نیمه همگرایی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. خواهیم دید که این روش تکراری و پیش‌شرط‌ساز وابسته به آن، تعمیمی از برخی روش‌ها و پیش‌شرط‌سازهای معرفی شده برای مسائل نقطه زینی تعمیم‌یافته خواهند بود و در نتیجه اثبات همگرایی و نیمه همگرایی این روش، همگرایی و نیمه همگرایی همه آن روش‌ها را شامل خواهد شد. هر چند که به دلیل شکل ویژه این روش، حالت‌های خاص بسیاری برای این روش وجود دارد، اما یکی از موارد خاص این روش را که دارای عملکرد خوبی می‌باشد، معرفی و مورد بررسی قرار می‌دهیم. پارامترهای بهینه برای این پیش‌شرط‌ساز را به دست آورده و حالت ناقص آن را برای کاربردهای عملی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نهایت با استفاده از نتایج عددی، رفتار پیش‌شرط‌سازهای معرفی شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

¹Xie²Ma³Extended PSS

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این بخش برخی از مفاهیم، تعاریف و قضایا که در فصل‌های آینده به آنها نیاز داریم بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و قضایا

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ متقارن^۱ نامیده می‌شود هرگاه $A^T = A$ و ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ هرمیتی^۲ گفته می‌شود هرگاه $A^* = A$. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را متقارن کج^۳ می‌نامند هرگاه $A^T = -A$ و ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را هرمیتی کج^۴ گویند هرگاه $A^* = -A$. هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را می‌توان به صورت یکتا به صورت مجموع یک ماتریس هرمیتی و هرمیتی کج نوشت که این تجزیه را تجزیه‌ی هرمیتی و هرمیتی کج ماتریس A می‌نامند. قسمت هرمیتی A را با A_H نشان می‌دهیم. می‌توان دید $A_H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ و در نتیجه قسمت هرمیتی کج برابر است با $S = A - A_H = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

ماتریس حقیقی $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متعامد نامیده می‌شود، هرگاه $A^T A = A A^T = I$ و ماتریس مختلط $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را یکانی گویند هرگاه $A^* A = A A^* = I$.

ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را معین مثبت هرمیتی^۵ (HPD) می‌گویند هرگاه $A^* = A$ و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $x^* A x > 0$. به طور مشابه ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را نیمه معین مثبت هرمیتی^۶ (HPSD) می‌نامند، هرگاه $A^* = A$ و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $x^* A x \geq 0$. ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ معین مثبت^۷ (PD) نامیده می‌شود، هرگاه ماتریس $A + A^*$ یک ماتریس HPD باشد.

قطر ماتریس A برابر بردار عناصر روی قطر ماتریس A تعریف می‌شود که آن را با $\text{diag}(A)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ به صورت $A = (a_{ij})$ باشد. ماتریس A را قطری گویند، هرگاه به ازای $i \neq j$ ، $a_{ij} = 0$. یک ماتریس قطری را با $\text{daig}_n(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ نشان می‌دهیم. اگر به ازای $i > j$ ، $a_{ij} = 0$ ، ماتریس A بالامثلثی و اگر به ازای $i \geq j$ ، $a_{ij} = 0$ ، ماتریس A بالامثلثی اکید نامیده می‌شود. ماتریس‌های پایین‌مثلثی و پایین‌مثلثی اکید نیز به همین صورت تعریف می‌شوند. فرض کنید ماتریس $A = (A_{ij})$ که در آن (A_{ij}) بلوک‌های ماتریس A هستند. در این صورت ماتریس A را قطری‌بلوکی گویند، هرگاه به ازای $i \neq j$ ،

¹Symmetric

²Hermitian

³Skew-Symmetric

⁴Skew-Hermitian

⁵Hermitian Positive Definite

⁶Hermitian Positive Semi Definite

⁷Positive Definite

$A_{ij} = 0$. یک ماتریس قطری بلوکی را معمولاً به صورت $\text{daig}_n(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn})$ نشان می‌دهیم. اگر به ازای $j > i$, $A_{ij} = 0$ ، ماتریس A را بالامثلثی بلوکی و اگر به ازای $i \geq j$, $A_{ij} = 0$ ، ماتریس A را بالامثلثی بلوکی اکید می‌گویند. ماتریس‌های پایین‌مثلثی بلوکی و پایین‌مثلثی بلوکی اکید نیز به همین صورت تعریف می‌شوند.

فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یا $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. در این صورت ماتریس A را بالاهسنبرگ^۱ می‌گویند، هرگاه $a_{ij} = 0$ به ازای $i - j > 1$ و همچنین ماتریس A پایین‌هسنبرگ^۲ نامیده می‌شود، هرگاه $a_{ij} = 0$ به ازای $j - i > 1$.

لم ۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، معین مثبت هرمیتی باشد. در این صورت یک ماتریس معین مثبت هرمیتی مانند B وجود دارد به طوری که $B^2 = A$. ماتریس B را با $A^{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۱.۲.۱. اگر P یک ماتریس معین مثبت (هرمیتی یا غیرهرمیتی) باشد، آنگاه P وارون‌پذیر است و P^{-1} نیز یک ماتریس معین مثبت (هرمیتی یا غیرهرمیتی) است.

(۲) اگر P یک ماتریس معین مثبت (هرمیتی یا غیرهرمیتی) باشد، آنگاه به ازای هر ماتریس A ، ماتریس A^*PA یک ماتریس نیمه معین مثبت (هرمیتی یا غیرهرمیتی) است.

(۳) اگر P_1 و P_2 دو ماتریس نیمه معین مثبت باشند، آنگاه ماتریس $P_1 + P_2$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است و به علاوه اگر یکی از این دو ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس مجموع آنها نیز معین مثبت خواهد بود.

(۴) اگر $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، معین مثبت هرمیتی و P و S به ترتیب ماتریس‌های معین مثبت و هرمیتی کج باشند، آنگاه ماتریس‌های $A^{\frac{1}{2}}PA^{\frac{1}{2}}$ و $A^{\frac{1}{2}}SA^{\frac{1}{2}}$ به ترتیب معین مثبت و هرمیتی کج هستند.

مجموعه‌ی مقادیر ویژه ماتریس A را با $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم. فضای پوچ و فضای برد ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ را که با نمادهای $\text{nul}(A)$ و $\text{range}(A)$ نشان می‌دهند، به صورت

$$\text{range}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{C}^n\},$$

$$\text{nul}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

تعریف می‌کنند.

تبصره ۳.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. اگر A نیمه معین مثبت باشد، آنگاه $\text{nul}(A) \subseteq \text{nul}(A + A^*)$ و اگر A نامنفرد باشد، داریم $\text{nul}(A) = \{0\}$ و $\text{range}(A) = \mathbb{C}^m$.

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. اگر عددی مانند $\lambda \in \mathbb{C}$ و بردار ناصفری متناظر با آن مانند $x \in \mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد که $Ax = \lambda x$ ، آنگاه λ را یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A و x را بردار ویژه‌ی متناظر با آن گویند. زوج (λ, x) را یک زوج ویژه‌ی ماتریس A نامند. هر ماتریس $n \times n$ دارای n مقدار ویژه می‌باشد که ممکن است بعضی از آنها تکراری باشند. به مرتبه‌ی تکرار هر مقدار ویژه، تکرار جبری آن مقدار ویژه گفته می‌شود. به جذر هر مقدار ویژه از ماتریس A^*A ، یک مقدار تکین ماتریس A گویند.

¹Upper Hessenberg

²Lower Hessenberg

شعاع طیفی ماتریس A را که با $\rho(A)$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

تعریف می‌شود. به علاوه شعاع طیفی ویژه ماتریس A که با $\nu(A)$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$\nu(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 1\},$$

خواهد بود.

تبصره ۱.۴.۱ ماتریس A نامنفرد است اگر و تنها اگر مقدار ویژه‌ی صفر نداشته باشد.

(۲) مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های هرمیتی، حقیقی هستند.

(۳) مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های معین مثبت هرمیتی (نیمه معین مثبت هرمیتی)، مثبت (نامنفی) می‌باشند.

(۴) قسمت حقیقی هر مقدار ویژه از ماتریس‌های معین مثبت (نیمه معین مثبت)، مثبت (نامنفی) می‌باشد.

(۵) مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های هرمیتی کج (پادمتقارن)، صفر یا موهومی محض هستند.

(۶) اگر $\lambda \in \sigma(A)$ ، آنگاه $\lambda + \alpha \in \sigma(A + \alpha I)$.

(۷) فرض کنید S, P و Σ به ترتیب ماتریس‌های نیمه‌ی معین مثبت، هرمیتی کج و معین مثبت هرمیتی باشند. در این صورت قسمت حقیقی مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های $P + \Sigma$ و $S + \Sigma$ مثبت است و در نتیجه این دو ماتریس نامنفردند.

(۸) به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، داریم $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

(۹) اگر $x \neq 0$ یک بردار ویژه‌ی ماتریس A باشد، آنگاه هر مضربی از x نیز یک بردار ویژه‌ی ماتریس A است. در نتیجه با تقسیم این بردار بر مقدار نرم خود، بردار ویژه‌ی A به دست می‌آید که اندازه نرم آن برابر ۱ است.

تعریف ۵.۱ (نرم طبیعی) فرض کنید $\|\cdot\|_*$ یک نرم برداری روی \mathbb{C}^n باشد و $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. در این صورت، نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|A\|_* = \max_{\|x\|_* \neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \max_{\|x\|_* = 1} \|Ax\|_*.$$

تبصره ۶.۱ روابط زیر برای هر نرم طبیعی $\|\cdot\|_*$ و نرم برداری وابسته‌ی به آن برقرار است.

(۱) برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و بردار $x \in \mathbb{C}^n$ ، داریم

$$\|Ax\|_* \leq \|A\|_* \|x\|_*.$$

(۲) فرض کنید λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A باشد. در این صورت $|\lambda| \leq \|A\|_*$ و در نتیجه خواهیم داشت $\rho(A) \leq \|A\|_*$.

به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ نرم طیفی (اقلیدسی) بردار $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ را که با $\|x\|_2$ نشان می‌دهیم، به صورت

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

تعریف می‌شود. متناظر با این نرم، به ازای هر $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، نرم طیفی (اقلیدسی) ماتریس A را با $\|A\|_2$ نشان داده که به صورت

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2,$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۷.۱.

روابط زیر برای نرم طیفی برقرار است.

(۱) برای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $x \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2, \quad \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2.$$

(۲) برای هر ماتریس A داریم:

$$\rho(A) \leq \|A\|_2, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sigma_{\max}(A),$$

که در آن $\sigma_{\max}(A)$ بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس A است.

(۳) اگر U یک ماتریس یکانی باشد، آنگاه $\|U\|_2 = 1$.

(۴) برای هر ماتریس A و یکانی U داریم $\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$.

(۵) اگر ماتریس $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ هرمیتی کج و $\alpha > 0$ باشد، آنگاه ماتریس $(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}$ یکانی است و در نتیجه

$$\|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}\|_2 = 1.$$

(۶) اگر A نرمال باشد، آنگاه $\|A\|_2 = \rho(A)$.

(۷) اگر A هرمیتی باشد، آنگاه $\|A\|_2 = \max\{|\lambda_{\max}(A)|, |\lambda_{\min}(A)|\}$ ، که در آن $\lambda_{\max}(A)$ و $\lambda_{\min}(A)$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A می‌باشند.

(۸) اگر A معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه $\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A)$ ، که در آن $\lambda_{\max}(A)$ بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A است.

□

اثبات. به [۵۲، ۸۸] مراجعه شود.

قضیه ۸.۱. (قضیه‌ی ریلی-ریتز) فرض کنید $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ باشند. آنگاه برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داریم $\lambda_1 \leq \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_n$ و

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\|x\|_2=1} x^*Ax, \quad \lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\|x\|_2=1} x^*Ax.$$

اثبات. به [۵۲] مراجعه شود. \square

تعریف ۹.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان \mathbb{F} باشد. یک ضرب داخلی روی V ، تابعی است که به هر زوج از بردارهای x و y در V یک اسکالر مثل (x, y) در \mathbb{F} را نسبت می‌دهد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \quad (x, x) \text{ حقیقی باشد و } (x, x) \geq 0. \text{ به علاوه } (x, x) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0;$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } \alpha \in \mathbb{F} \text{، } (x, \alpha y) = \alpha(x, y);$$

$$(۳) \quad \text{برای هر } (x, y + z) = (x, y) + (x, z);$$

$$(۴) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}.$$

هر فضای برداری که یک ضرب داخلی روی آن تعریف شده باشد را یک فضای ضرب داخلی می‌نامند. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی روی میدان \mathbb{F} و (\cdot, \cdot) یک ضرب داخلی روی V باشد. در این صورت، اگر به ازای هر $x \in V$ ، قرار دهیم

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)},$$

آنگاه $\|\cdot\|_2$ یک نرم روی V تعریف می‌کند.

تعریف ۱۰.۱. دو بردار x و y در یک فضای ضرب داخلی V با ضرب داخلی (\cdot, \cdot) بر هم عمودند، هرگاه $(x, y) = 0$. این تعامد را با $x \perp y$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۱.۱. مجموعه‌ی بردارهای $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ را یک مجموعه‌ی یکامتعامد^۱ می‌نامند، هرگاه به ازای هر i ، $\|u_i\|_2 = 1$ و به ازای هر i و j با شرط $i \neq j$ ، داشته باشیم $u_i \perp u_j$. به عبارت دیگر

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

تعریف ۱۲.۱. ماتریس‌های $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را متشابه گویند، هرگاه یک ماتریس نامنفرد مثل P وجود داشته باشد به طوری که $P^{-1}BP = A$. اگر ماتریس P یکانی باشد، می‌گوییم ماتریس A با ماتریس B به طور یکانی متشابه است.

قضیه ۱۳.۱. (شکل شور^۲ یک ماتریس) به ازای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس بالامثلثی مانند $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و یک ماتریس یکانی مانند $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارد به طوری که

^۱Orthonormal

^۲Schur

$$U^*AU = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

که در آن $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ مقادیر ویژه‌ی A (نه لزوماً متمایز) می‌باشند. ماتریس T را شکل شور ماتریس A می‌گویند.

بنابراین هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ به صورت یکانی با یک ماتریس بالامثلثی متشابه است.

تبصره ۱۴.۱. با توجه به شکل شور یک ماتریس نتایج زیر را خواهیم داشت.

(۱) ماتریس $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ نرمال است، اگر و تنها اگر به صورت یکانی با یک ماتریس قطری $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ متشابه باشد. عناصر قطری ماتریس Λ مقادیر ویژه‌ی ماتریس N هستند.

(۲) ماتریس‌های هرمیتی و متقارن، به صورت یکانی با یک ماتریس قطری متشابه هستند.

(۳) ماتریس‌های هرمیتی کج و پادمتقارن، به صورت یکانی با یک ماتریس قطری متشابه هستند.

قضیه ۱۵.۱. (کیلی-همیلتون) فرض کنید χ چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ باشد. در این صورت، $\chi(A) = 0$.

اثبات. به [۸۷] مراجعه شود. \square

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. چندجمله‌ای مینیمال A یک چندجمله‌ای تکین مثل q با کوچک‌ترین درجه ممکن است به طوری که $q(A) = 0$.

تبصره ۱۷.۱. (۱) ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A برابر مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

(۲) چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن را عاد می‌کند و در نتیجه ریشه‌های چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A نیز، مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

قضیه ۱۸.۱. (تجزیه‌ی مقدار تکین^۱) فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. در این صورت، ماتریس‌های متعامد $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ و $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و ماتریس

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad D_r = \text{diag}_r\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\},$$

وجود دارند به طوری که $A = U\Sigma V^*$ ، که در آن $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ، σ_i ها مقادیر تکین ماتریس A ، ستون‌های $U = (u_1, \dots, u_m)$ را بردارهای تکین چپ A و ستون‌های ماتریس $V = (v_1, \dots, v_n)$ را بردارهای تکین راست A می‌نامند.

اثبات: به [۸۸] مراجعه شود.

^۱Singular value decomposition

تعریف ۱۹.۱. حداکثر تعداد ستون‌ها یا سطرهاى مستقل خطی یک ماتریس را رتبه‌ی آن ماتریس می‌گویند. رتبه‌ی ماتریس A را با $\text{Rank}(A)$ نشان می‌دهیم. ماتریس $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ را رتبه کامل^۱ گویند، هرگاه

$$\text{Rank}(B) = \min\{m, n\}.$$

تبصره ۲۰.۱. برای ماتریس‌های رتبه کامل روابط زیر برقرار است.

- (۱) اگر $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $(m \leq n)$ ، رتبه کامل باشد، آنگاه ماتریس BB^* وارون‌پذیر است.
- (۲) اگر $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $(m \leq n)$ ، رتبه کامل باشد، آنگاه $B^*x = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.
- (۳) هر ماتریس مربعی رتبه کامل است اگر و تنها اگر وارون‌پذیر باشد.
- (۴) اگر $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس وارون‌پذیر و $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $(m \leq n)$ ، یک ماتریس رتبه کامل باشد، آنگاه ماتریس AB^* یک ماتریس وارون‌پذیر است.

(۵) فرض کنید $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $(m \leq n)$ ، یک ماتریس رتبه کامل باشد. در این صورت اگر A یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس BAB^* نیز یک ماتریس معین مثبت است و اگر A یک ماتریس نیمه معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس BAB^* نیز یک ماتریس نیمه معین مثبت می‌باشد.

۲.۱ عدد شرطی و پیش‌شرط‌سازی دستگاه معادلات خطی

مسائلی وجود دارند که نسبت به داده‌های ورودی خود بسیار حساس می‌باشند و با کوچک‌ترین تغییری در داده‌های ورودی، تغییرات بزرگی در جواب دقیق این مسائل پدید می‌آید. به عبارتی، یک خطای نسبی کوچک در داده‌های ورودی مسئله، باعث خطای نسبی بزرگی در جواب مسئله می‌شود. این خاصیت از مسئله، به ماهیت خود مسئله ارتباط دارد و مستقل از الگوریتم به‌کارگیری برای حل آن مسئله می‌باشد. چنین مسائلی را مسائل بدحالت یا بدشرط می‌گویند. در غیر این صورت مسئله خوش حالت یا خوش شرط نامیده می‌شود. به دلیل وجود خطاهای مختلف، از هر الگوریتمی که برای حل یک مسئله‌ی بدحالت استفاده شود، تضمینی برای درستی جواب به دست آمده از آن الگوریتم وجود ندارد و ممکن است، الگوریتم جواب غیر قابل قبولی ارائه دهد. در جبر خطی عددی، عددی به هر مسئله، به عنوان عدد حالت یا عدد شرطی نسبت داده می‌شود که نشان دهنده‌ی خوش حالتی یا بدحالتی آن مسئله می‌باشد. این عدد، برای حل دستگاه معادلات خطی سازگار

$$Ax = b, \quad (1.1)$$

با $\text{cond}(A)$ نشان داده می‌شود که به ازای هر نرم $\|\cdot\|$ روی $\mathbb{C}^{n \times n}$ ، اگر ماتریس A نامنفرد باشد، به صورت $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ و اگر ماتریس A منفرد باشد، به صورت $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^\dagger\|$ ، که در آن A^\dagger وارون تعمیم یافته‌ی ماتریس A می‌باشد ([۸۸] را ببینید)، تعریف می‌شود. در این رساله، از عدد حالت به دست آمده از نرم طیفی استفاده می‌کنیم. بنابراین منظور ما از عدد حالت، مقدار $\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ ، $\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ می‌باشد.

¹Full rank

قضیه ۲۱.۱. [۴۱] خواص زیر برای عدد حالت برقرار است.

(۱) عدد حالت هر ماتریس برای هر نرم $\|\cdot\|$ در $\mathbb{C}^{n \times n}$ ، که دارای خاصیت $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ باشد، بزرگتر یا مساوی ۱ است.

(۲) برای هر ماتریس یکانی A ، $\text{cond}(A) = 1$.

(۳) $\text{cond}(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$ که در آن $\sigma_{\min}(A)$ و $\sigma_{\max}(A)$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقادیر تکین ماتریس نامفرد A هستند.

(۴) برای ماتریس نامفرد A ، $\text{cond}(A) \geq \frac{\rho(A)}{|\lambda_n|}$ ، که در آن $\{\lambda_i : \lambda_i \in \sigma(A)\}$ و $|\lambda_n| = \min$.

(۵) $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$.

(۶) $\text{cond}(A^T) = \text{cond}(A)$ ، $\text{cond}(AA^T) = \text{cond}(A)^2$ ، $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.

فرض کنید توسط یک الگوریتم، جوابی مانند \hat{x} برای دستگاه معادلات خطی (۱.۱) محاسبه شده باشد. برای تعیین دقت این جواب، می‌توان خطای نسبی جواب به دست آمده را محاسبه نمود. اما از آنجا که معمولاً جواب دستگاه در دست نمی‌باشد، می‌توان از مقدار بردار مانده، که به صورت $r = b - Ax$ می‌باشد، و محاسبه‌ی خطای نسبی $\delta = \|r\|/\|b\|$ ، برای تعیین دقت جواب استفاده کرد. اما در عمل، ممکن است مقدار مانده برای بردار \hat{x} کوچک باشد، اما \hat{x} با جواب اصلی مسأله اختلاف زیادی داشته باشد. به عنوان مثال، دستگاه معادلات خطی (۱.۱) را با

$$A = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 20^6 & 0 & 0 & 1 \\ & 2 & & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

در نظر بگیرید. می‌توان دید که بردار $x = [0; 2]$ ، تقریب خوبی برای جواب این دستگاه می‌باشد، زیرا $r = b - A\hat{x} = [0; 0]$ مقدار کوچکی است. اما این جواب با جواب دقیق مسأله، یعنی بردار $x = [1; 1]$ ، اختلاف زیادی دارد. از این رو کوچک بودن نسبت نرم مانده، نمی‌تواند معیار خوبی برای دقت جواب به دست آمده باشد. میزان دقت جواب به دست آمده، توسط قضیه‌ی مانده مشخص می‌شود.

قضیه ۲۲.۱. [۴۱] (قضیه‌ی مانده) فرض کنید x جواب اصلی دستگاه (۱.۱) و \hat{x} تقریبی برای این مقدار باشد. در این صورت

$$\frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b - A\hat{x}\|_2}{\|b\|_2}. \quad (3.1)$$

از این رو در تعیین میزان دقت جواب، نه تنها نسبت نرم مانده، بلکه عدد شرطی ماتریس ضرایب دستگاه نیز تاثیرگذار است. بنابراین، اگر عدد شرطی ماتریس ضرایب دستگاه بزرگ باشد، آنگاه مقدار مانده‌ی بردار \hat{x} ، هر اندازه هم که کوچک باشد، اختلاف جواب به دست آمده با جواب اصلی می‌تواند بسیار زیاد باشد. با توجه به رابطه (۳.۱)، دقت جواب به دست آمده زمانی می‌تواند بدتر باشد که علاوه بر عدد شرطی، نسبت $\|x\|_2/\|b\|_2$ هم عدد بزرگی باشد. بعنوان مثال، اگر $\|r\|_2 = \|b - A\hat{x}\|_2 < 10^{-8}$ و $\text{cond}(A) = 10^9$ ،

و $10^4 = \|x\|_p / \|b\|_p$ ، آنگاه $10^5 < \|x - \hat{x}\|_p$ که عدد بسیار بزرگی است. بنابراین، اگر دقت جواب به دست آمده از یک روش تکراری مهم باشد، باید به عدد شرطی و نسبت $\|x\|_p / \|b\|_p$ توجه داشت و برای دست یافتن به دقت مطلوب، شرط توقف را متناسب با کرانی برای این مقادیر در نظر گرفت. البته برای افزایش دقت جواب، می‌توان دستگاهی را معادل دستگاه (۱.۱) حل نمود که دارای عدد شرطی کوچکتری نسبت به دستگاه اصلی باشد. از آنجا که

$$\text{cond}(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}, \quad (4.1)$$

که در آن $\sigma_{\max}(A)$ و $\sigma_{\min}(A)$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس نامنفرد A هستند، این امر می‌تواند با تغییر دادن مقادیر تکین ماتریس ضرایب، و بخصوص، افزایش کوچک‌ترین مقدار آن، تحقق یابد.

بدین منظور، می‌توان با ضرب وارون یک ماتریس وارون‌پذیر مانند P در ماتریس A آن را خوش حالت کرد و یکی از دستگاه‌های معادل با دستگاه (۱.۱) به صورت

$$P^{-1}Ax = c, \quad c = P^{-1}b, \quad (5.1)$$

$$AP^{-1}y = b, \quad y = Px, \quad (6.1)$$

را حل نمود. هر یک از دو دستگاه بالا را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده می‌گویند. به ماتریس P در دستگاه (۵.۱)، پیش‌شرط‌ساز چپ و در دستگاه (۶.۱)، پیش‌شرط‌ساز راست گویند و در هر دو آن را پیش‌شرط‌ساز می‌نامند. دستگاه (۵.۱) را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده از چپ و دستگاه (۶.۱) را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده از سمت راست می‌نامند و هر یک از این دو دستگاه را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده می‌گویند. البته دقت کنید اگر ماتریس ضرایب دستگاه (۱.۱) نیمه معین مثبت باشد، آنگاه به جای حل این دستگاه می‌توان دستگاه

$$(A + \alpha I)x = b, \quad \alpha \approx 0, \quad (7.1)$$

را حل نمود. که دارای عدد حالت بهتری نسبت به دستگاه (۱.۱) می‌باشد. زیرا در این حالت

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}^2(A + \alpha I) &= \lambda_{\min}((A + \alpha I)^*(A + \alpha I)) \\ &= \lambda_{\min}(A^*A + \alpha(A + A^*) + \alpha^2 I) \\ &\geq \lambda_{\min}(A^*A) + \alpha\lambda_{\min}(A^* + A) + \alpha^2 \\ &= \sigma_{\min}^2(A) + \alpha\lambda_{\min}(A^* + A) + \alpha^2. \end{aligned}$$

چون ماتریس A معین مثبت است، پس $\lambda_{\min}(A^* + A) > 0$ که نتیجه می‌دهد $\sigma_{\min}^2(A + \alpha I) > \sigma_{\min}^2(A)$. لذا کوچک‌ترین مقدار تکین دستگاه، افزایش می‌یابد. با استفاده از قضیه‌ی تاثیر اختلال در چپ، می‌توان تاثیر پارامتر α را بر روی دقت جواب به دست آمده مشاهده نمود.

قضیه ۲۳.۱. [۴۱، قضیه ۲۳.۴] (قضیه‌ی تاثیر اختلال در چپ) فرض کنید A نامنفرد و $b \neq 0$. اگر ΔA

و $\delta(x)$ ، به ترتیب میزان اختلال‌های A و x در دستگاه معادلات خطی (۱.۱) و $\frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ و $\|\Delta A\|_2$ آنگاه

$$\frac{\|\delta(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}.$$

بنابراین در این روش داریم

$$\frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\alpha}{\|A\|_2}}{1 - \text{cond}(A) \frac{\alpha}{\|A\|_2}} = \frac{\|A^{-1}\|_2 \alpha}{1 - \|A^{-1}\|_2 \alpha},$$

که نتیجه می‌دهد اگر $\|A^{-1}\|_2 \alpha$ عدد کوچکی باشد، آنگاه جواب به دست آمده از دستگاه (۷.۱)، به جواب دستگاه (۱.۱)، نزدیک خواهد بود.

۳.۱ روش‌های تکراری ایستا

در این بخش شکل کلی یک روش تکراری ایستا را برای حل یک دستگاه معادلات خطی معرفی می‌کنیم. یک شکافت^۱ برای ماتریس A به صورت $A = M - N$ در نظر می‌گیریم که در آن M نامنفرد است. ابتدا دستگاه (۱.۱) را به صورت

$$(M - N)x = b,$$

و سپس به صورت

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b,$$

می‌نویسیم. قرار می‌دهیم $G = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. در این صورت، با استفاده از رابطه‌ی اخیر، دنباله‌ی تکراری

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f, \quad (۸.۱)$$

را تولید می‌کنیم که در آن $x^{(0)}$ یک حدس اولیه‌ی دلخواه است. در رابطه‌ی فوق G را ماتریس تکرار روش و این روش را روش تکراری وابسته به شکافت $A = M - N$ می‌گویند.

توجه داشته باشید، اگر ماتریس A نامنفرد باشد، آنگاه جواب دستگاه (۱.۱) یکتاست. ولی اگر این ماتریس منفرد باشد، این دستگاه بینهایت جواب دارد. اگر ماتریس A نامنفرد باشد، دنباله‌ی تکراری تولید شده توسط رابطه‌ی (۸.۱) را همگرا گوئیم، اگر به ازای یک بردار اولیه‌ی $x^{(0)}$ به تنها جواب دستگاه معادلات خطی (۱.۱) همگرا شود. اگر ماتریس A منفرد باشد، آنگاه دنباله‌ی تکراری تولید شده را نیمه همگرا گوئیم، هرگاه این دنباله به ازای یک بردار $x^{(0)}$ ، به یکی از جواب‌های دستگاه (۱.۱) همگرا گردد. قضایای زیر شرط لازم و کافی برای همگرایی یا نیمه همگرایی یک روش ایستا را بیان می‌کند.

قضیه ۲۴.۱. فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت از A باشد، $G = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. در این صورت

^۱Splitting

(۱) روند تکراری $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ همگراست اگر و تنها اگر شعاع طیفی ماتریس تکرار کمتر از یک باشد، یعنی $\rho(G) < 1$.

(۲) روند تکراری $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}$ به یک جواب دستگاه $Ax = b$ نیمه همگراست، اگر و تنها اگر

(\bar{A}) شعاع طیفی ویژه‌ی ماتریس تکرار کمتر از یک باشد، یعنی $\nu(G) < 1$.

(ب) $\text{Rank}(I - G)^2 = \text{Rank}(I - G)$ که معادل است با $\text{nul}((M^{-1}A)^2) = \text{nul}(M^{-1}A)$.

اثبات. به [۸۸] مراجعه شود. \square

با توجه به قضیه‌ی قبل می‌بینیم که روند تکراری (۸.۱) همگراست اگر و تنها اگر

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

همچنین، روند تکراری (۸.۱) همگراست اگر و تنها اگر مقادیر ویژه‌ی $M^{-1}A$ درون دایره‌ای به مرکز $(1, 0)$ و به شعاع ۱ قرار داشته باشند، یا به اصطلاح مقادیر ویژه در درون این دایره حول نقطه‌ی $(1, 0)$ خوشه شده باشند. علاوه بر این، هرچه مقادیر ویژه‌ی ماتریس $M^{-1}A$ حول نقطه‌ی $(1, 0)$ بهتر خوشه شده باشند، آنگاه همگرایی سریع‌تر خواهد بود. این امر نشان می‌دهد که ماتریس پیش‌شرط‌ساز M باید طوری انتخاب شود که مقادیر ویژه‌ی $M^{-1}A$ حول نقطه $(1, 0)$ خوشه شوند. در بهترین حالت اگر $M = A$ اختیار شود، آنگاه خواهیم داشت $M^{-1}A = I$ و تمام مقادیر ویژه‌ی $M^{-1}A$ برابر با ۱ خواهند بود و

$$G = M^{-1}N = I - M^{-1}A = 0.$$

این رابطه نشان می‌دهد که تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس تکرار برابر با صفر خواهد بود و روش، سریع‌ترین همگرایی ممکن را خواهد داشت. اما در عمل برای ماتریس‌های بزرگ، محاسبه‌ی A^{-1} مقرون به صرفه نیست. بنابراین ماتریس M یک تقریب از A در نظر گرفته می‌شود.

۴.۱ معرفی روش‌های مبتنی بر زیرفضای کرایلف

در این فصل ضمن معرفی روش تکراری مانده مینیمال تعمیم یافته، روش تکراری گرادیان مزدوج را نیز معرفی می‌کنیم.

۱.۴.۱ الگوریتم مانده‌ی مینیمال تعمیم یافته (GMRES)

روش GMRES از جمله روش‌های تکراری غیرایستا و از جمله روش‌های مبتنی بر زیرفضای کرایلف برای حل دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \quad (9.1)$$

می‌باشد که در سال ۱۹۸۶ توسط سعد و شولتز در [۶۵] معرفی شد. این روش برای دستگاهی که ماتریس ضرایب آن یک ماتریس دلخواه باشد قابل استفاده است. دستگاه معادلات خطی (۹.۱) را در نظر بگیرید که در آن ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نامنفرد است و $b, x \in \mathbb{R}^n$. فرض کنید p چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A باشد. بنا به قضیه‌ی کیلی-همیلتون ۱۵.۱، داریم $p(A) = 0$. بنابراین اگر

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

آنگاه

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0.$$

از اینکه A نامنفرد است، داریم $(-1)^n a_0 = \det(A) \neq 0$. لذا

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I) = q_{n-1}(A), \quad (10.1)$$

که در آن

$$q_{n-1}(x) = -\frac{1}{a_0} (x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1).$$

از این رو، اگر x^* جواب واقعی دستگاه (۹.۱) باشد، آنگاه

$$x^* = q_{n-1}(A)b \in \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}. \quad (11.1)$$

تعریف ۲۵.۱. به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ ، زیرفضای کرایلف m -بعدی تولید شده توسط ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و بردار $v \in \mathbb{R}^n$ ، به صورت

$$\mathcal{K}_m(A, v) = \text{span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\},$$

تعریف می‌شود.

حال با توجه به رابطه‌ی (۱۱.۱)، می‌بینیم که $x^* \in \mathcal{K}_n(A, b)$. بنابراین برای محاسبه‌ی x^* می‌توان این بردار را در $\mathcal{K}_n(A, b)$ جستجو کرد. فرض کنید x_0 یک حدس اولیه برای جواب دستگاه (۹.۱) باشد. در این صورت، داریم

$$Ax - Ax_0 = b - Ax_0.$$

با فرض $r_0 = b - Ax_0$ و $x - x_0 = \delta$ ، دستگاه (۹.۱) معادل با

$$A\delta = r_0, \quad (12.1)$$

خواهد بود. لذا، اگر δ از معادله (۱۲.۱) محاسبه شود، آنگاه جواب واقعی دستگاه (۹.۱) به صورت $x = x_0 + \delta$ خواهد بود. همان طور که دیدیم $\delta \in \mathcal{K}_n(A, r_0)$. اما به ازای مقادیر بزرگ n این جستجو بسیار پرهزینه است. بنابراین سعی می‌کنیم یک جواب تقریبی برای دستگاه محاسبه کنیم. برای این کار، یک m کوچک (معمولاً کمتر یا مساوی ۵۰) انتخاب شده و یک جواب تقریبی مثل δ_m در $\mathcal{K}_m(A, r_0)$ جستجو

می‌گردد. این یعنی، به دنبال یک جواب تقریبی به صورت

$$x_m = x_* + \delta_m \in x_* + \mathcal{K}_m(A, r_*), \quad (13.1)$$

هستیم. بنابراین چنین برداری را در الگوریتم GMRES جستجو می‌کنیم به طوری که

$$\|b - Ax_m\|_2 = \min_{x=x_*+\delta \in x_*+\mathcal{K}_m(A, r_*)} \|b - Ax\|_2. \quad (14.1)$$

برای محاسبه‌ی بردار $\delta_m \in \mathcal{K}_m(A, r_*)$ ابتدا بعضی از خواص فضای کرایلف $\mathcal{K}_m(A, r_*)$ را مطالعه می‌کنیم. فرض کنید $w \in \mathcal{K}_m(A, r_*)$. در این صورت، اعدادی مثل $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ، $i = 0, 1, \dots, m$ وجود دارند به طوری که

$$w = \alpha_0 r_* + \alpha_1 A r_* + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} r_* = q_{m-1}(A) r_*,$$

که در آن

$$q_{m-1}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1}.$$

از این رو، $w \in \mathcal{K}_m(A, r_*)$ اگر و تنها اگر یک چندجمله‌ای، حداکثر از درجه $m-1$ مثل q_{m-1} موجود باشد به طوری که $w = q_{m-1}(A) r_*$.

لم ۲۶.۱. اگر به ازای یک $j \geq 1$ داشته باشیم $A^j r_* \in \mathcal{K}_j(A, r_*)$ ، آنگاه به ازای هر $k \geq j$ خواهیم داشت $A^k r_* \in \mathcal{K}_j(A, r_*)$.

اثبات. به [۸۷] مراجعه شود. □

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $v \in \mathbb{R}^n$. چندجمله‌ای مینیمال بردار v نسبت به A یک چندجمله‌ای تکین p با کوچک‌ترین درجه است به طوری که $p(A)v = 0$. درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال بردار v نسبت به ماتریس A ، درجه بردار v نسبت به A نامیده می‌شود و با $\text{grade}_A(v)$ نشان می‌دهند.

اگر p چندجمله‌ای مینیمال A باشد، آنگاه $p(A) = 0$ و از این رو، $p(A)v = 0$ ، لذا،

$$\text{grade}_A(v) \leq \deg(p) \leq n.$$

قضیه ۲۸.۱. بعد زیرفضای کرایلف $\mathcal{K}_m(A, v)$ برابر m است اگر و تنها اگر درجه بردار v ، یعنی $\mu = \text{grade}_A(v)$ ، کوچکتر از m نباشد. به عبارت دیگر

$$\dim(\mathcal{K}_m(A, v)) = m \iff \text{grade}_A(v) \geq m.$$

از این رو،

$$\dim(\mathcal{K}_m(A, v)) = \min\{m, \text{grade}_A(v)\}.$$

اثبات. به [۸۷] مراجعه شود. □

برای محاسبه‌ی $\delta_m \in \mathcal{K}_m(A, r_*)$ یک پایه‌ی یک‌معامد برای $\mathcal{K}_m(A, r_*)$ می‌یابیم. برای این کار، از الگوریتم گرام-اشمیت [۸۸]، استفاده می‌کنیم. بنابراین الگوریتم آرنولدی گرام-اشمیت را به صورت الگوریتم ۱.۱ می‌نویسیم.

الگوریتم ۱.۱ الگوریتم روش گرام-اشمیت آرنولدی

(۱) قرار دهید $\beta = \|r_*\|_2$ و $v_1 = r_*/\beta$

(۲) برای $j = 1, 2, \dots, m$ ، روند زیر را تکرار کنید:

(آ) مقادیر $h_{ij} = (Av_j, v_i)$ را به ازای $i = 1, 2, \dots, j$ محاسبه کنید.

(ب) مقدار $w_j = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$ را محاسبه کنید.

(ج) $h_{j+1,j} := \|w_j\|_2$

(د) اگر $h_{j+1,j} = 0$ ، توقف کنید.

(ه) $v_{j+1} := w_j / \|w_j\|_2$

قضیه ۲۹.۱. اگر $V_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ و ماتریس بالاهسنبرگی $(m+1) \times m$ با درایه‌های h_{ij} تعریف شده در الگوریتم ۱.۱، را با \bar{H}_m و ماتریس حاصل از حذف سطر آخر \bar{H}_m را با H_m نشان دهیم، آنگاه روابط

$$\begin{aligned} AV_m &= V_m H_m + w_m e_m^T \\ &= V_{m+1} \bar{H}_m, \\ V_m^T AV_m &= H_m, \end{aligned}$$

برقرارند، که در آن $V_{m+1} = (V_m, v_{m+1})$.

□

اثبات. به [۸۷] مراجعه شود.

فرض کنید $h_{j+1,j} = 0$. در این صورت، با توجه به $w_j = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$ از الگوریتم ۱.۱ داریم

$$Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i = 0, \quad (۱۵.۱)$$

یعنی

$$Av_j = \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i.$$

این رابطه نشان می‌دهد که بردار $A^j r_*$ به مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ وابسته است. لذا

$$x^* \in x_* + \mathcal{K}_j(A, r_*),$$

که این خود یک موفقیت است. توجه کنید که اگر j عدد کوچکی باشد، آنگاه $x_* + \mathcal{K}_j(A, r_*)$ یک زیرفضای کوچکی خواهد بود و می‌توانیم جواب واقعی مسأله را در یک فضای کوچک جستجو کنیم. در عمل برای محاسبه‌ی پایه‌ی یکامتعامد از الگوریتم گرام-اشمیت آرنولدی اصلاح شده استفاده می‌شود که مشابه الگوریتم ۱.۱ به صورت ۲.۱ جمع بندی می‌شود.

الگوریتم ۲.۱ الگوریتم روش گرام-اشمیت آرنولدی اصلاح شده

(۱) قرار دهید $v_1 = r_*/\beta$ و $\beta = \|r_*\|_2$

(۲) برای $j = 1, 2, \dots, m$ ، روند زیر را تکرار کنید:

(آ) $w_j = Av_j$ را محاسبه کنید.

(ب) برای $i = 1, 2, \dots, j$ ، روند زیر را تکرار کنید:

$$h_{ij} := (w_j, v_i) \quad \bullet$$

$$w_j := w_j - h_{ij}v_i \quad \bullet$$

$$h_{j+1,j} := \|w_j\|_2 \quad \bullet \quad \text{اگر } h_{j+1,j} = 0, \text{ سپس متوقف می‌شود.}$$

$$v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j} \quad (\text{ج})$$

فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ پایه‌ی یکامتعامدی باشد که توسط الگوریتم ۲.۱ برای $\mathcal{K}_m(A, r_*)$ فراهم شده باشد. در این صورت، هر بردار x در $x_* + \mathcal{K}_m(A, r_*)$ به صورت $x = x_* + V_m y$ خواهد بود که در آن $V_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ و $y \in \mathbb{R}^m$. بنابراین، داریم

$$\|b - Ax\|_2 = \|b - A(x_* + V_m y)\|_2 = \|r_* - AV_m y\|_2, \quad (۱۶.۱)$$

اما با استفاده از قضیه‌ی ۲۹.۱ و گام اول الگوریتم ۲.۱ می‌بینیم که

$$AV_m = V_{m+1} \bar{H}_m, \quad r_* = \beta v_1 = \beta V_{m+1} e_1,$$

که در آن $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. با جای‌گذاری این رابطه‌ها در (۱۶.۱) خواهیم داشت

$$\|b - Ax\|_2 = \|V_{m+1}(\beta e_1 - \bar{H}_m y)\|_2 = \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2.$$

بنابراین الگوریتم برداری GMRES مثل $x_m = x_* + V_m y_m$ محاسبه می‌کند که در آن

$$y_m = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^{m+1}} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2,$$

در مسأله‌ی کمترین توان دوم فوق، ماتریس \bar{H}_m یک ماتریس کوچک از بعد $m \times (m+1)$ و بالاهسنبرگی است. بنابراین الگوریتم GMRES را به صورت الگوریتم ۳.۱ جمع بندی می‌کنیم.

جوابی که الگوریتم ۳.۱ می‌دهد ممکن است تقریب مناسبی برای جواب مسأله نباشد. برای بهبود جواب می‌توان از نسخه‌ی “با شروع مجدد” آن استفاده کرد. در نسخه‌ی با شروع مجدد یک حدس اولیه‌ی دلخواه x و یک زیرفضای کرایلف m بعدی انتخاب کرده و جواب تقریبی x_m را به دست می‌آوریم. سپس جواب

الگوریتم ۳.۱ الگوریتم روش مانده مینیمال تعمیم‌یافته (GMRES)

(۱) محاسبه کنید $r_* = b - Ax_*$ ، $\beta := \|r_*\|_2$ و $v_1 := r_*/\beta$.

(۲) ماتریس $\bar{H}_m = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1) \times m}$ را تعریف کنید. قرار دهید $\bar{H}_m = 0$.

(۳) برای $j = 1, 2, \dots, m$

(آ) $w_j := Av_j$ را محاسبه کنید

(ب) به ازای $i = 1, 2, \dots, j$ ، روند زیر را تکرار کنید:

$$h_{ij} = (w_j, v_i) \quad \bullet$$

$$w_j := w_j - h_{ij}v_i \quad \bullet$$

• محاسبه کنید $\|w_j\|_2 = h_{j+1,j}$. اگر $h_{j+1,j} = 0$ ، قرار دهید $m := j$ و به گام ۴ بروید.

$$v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j} \quad (\text{ج})$$

(۴) y_m را به عنوان مینیمم‌کننده $\|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$ محاسبه کرده و قرار دهید $x_m = x_* + V_m y_m$.

تقریبی x_m را به عنوان حدس اولیه‌ی جدید x_* قرار داده و الگوریتم را برای به دست آوردن x_m جدید، دوباره اجرا می‌کنیم. این روند را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به یک جواب تقریبی با یک دقت مناسب دست پیدا کنیم. این روند در الگوریتم ۴.۱ جمع بندی شده است.

الگوریتم ۴.۱ الگوریتم روش GMRES با شروع مجدد GMRES(m)

(۱) محاسبه کنید $r_* = b - Ax_*$ ، $\beta = \|r_*\|_2$ و $v_1 = r_*/\beta$.

(۲) پایه‌ی آرنولدی و ماتریس \bar{H}_m با استفاده از الگوریتم آرنولدی با شروع v_1 را بسازید.

(۳) y_m را به عنوان مینیمم‌کننده $\|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$ محاسبه کرده و قرار دهید $x_m = x_* + V_m y_m$.

(۴) اگر جواب تقریبی محاسبه‌ی شده در شرط توقف صدق کند سپس متوقف شود، در غیر این صورت قرار دهید $x_* := x_m$ و به گام ۱ بروید.

در روش تکراری GMRES(m) و همچنین دیگر روش‌های تکراری مشابه برای حل دستگاه‌های نامتقارن هر سه نوع پیش‌شرط‌سازی (چپ، راست و دوطرفه) مورد استفاده قرار می‌گیرند. در اینجا ما نسخه‌ی GMRES(m) با پیش‌شرط‌ساز راست را ارائه می‌نماییم. الگوریتم GMRES(m) با پیش‌شرط‌ساز راست، برای حل دستگاه

$$AM^{-1}u = b, \quad u = Mx$$

استفاده می‌شود. واضح است که $b - Ax_* = b - AM^{-1}u$. بنابراین کافی است در الگوریتم GMRES(m) ماتریس A با ماتریس AM^{-1} جایگزین شود. در این صورت، روش GMRES(m) با پیش‌شرط‌ساز راست به صورت الگوریتم ۵.۱ جمع بندی می‌شود.

الگوریتم ۵.۱ روش $\text{GMRES}(m)$ با پیش‌شرط‌ساز راست

(۱) قرار دهید $r_* = b - Ax_*$ ، $\beta = \|r_*\|_2$ و $v_1 = r_*/\beta$.

(۲) برای $j = 1, 2, \dots, m$ ، روند زیر را تکرار کنید:

(آ) قرار دهید $z_j = M^{-1}v_j$.

(ب) قرار دهید $w := Az_j$.

(ج) به ازای $i = 1, 2, \dots, j$ ، روند زیر را تکرار کنید:

• قرار دهید $h_{ij} = (w, v_i)$.

• قرار دهید $w := w - h_{ij}v_i$.

(د) $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$ و $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ محاسبه کنید.

(۳) تعریف کنید $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$ و $\bar{H}_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq j+1, 1 \leq j \leq m}$.

(۴) $y_m = \operatorname{argmin}_y \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$ و $x_m = x_* + Z_m y_m$ را محاسبه کنید.

(۵) اگر جواب تقریبی محاسبه‌ی شده در شرط توقف صدق می‌کند، متوقف شوید و در غیر این صورت قرار دهید $x_* = x_m$ و به گام ۱ بروید.

حلقه‌ی گرام-اشمیت آرنولدی در الگوریتم ۵.۱ یک پایه‌ی یکامتعامد برای فضای کرایلف

$$\operatorname{span} \{r_*, AM^{-1}r_*, \dots, (AM^{-1})^{m-1}r_*\},$$

می‌سازد. همه‌ی بردارهای مانده و نرم آنها که از الگوریتم ۵.۱ محاسبه می‌شوند بردار مانده‌ی دستگاه هستند، زیرا $b - Ax_m = b - AM^{-1}u_m$. اگر در هر تکرار از روش $\text{GMRES}(m)$ با پیش‌شرط‌ساز راست، ماتریس پیش‌شرط‌ساز M تغییر کند، یعنی در هر گام داشته باشیم $z_j = M_j^{-1}v_j$ ، آنگاه الگوریتم GMRES با پیش‌شرط‌ساز راست، تبدیل به الگوریتم GMRES انعطاف‌پذیر^۱ (FGMRES) می‌شود.

۲.۴.۱ الگوریتم گرادیان مزدوج (CG)

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \quad (17.1)$$

را در نظر بگیرید که در آن A یک ماتریس معین مثبت متقارن است. روش گرادیان مزدوج^۲ (CG) از جمله الگوریتم‌های مهم برای حل این گونه دستگاه‌ها می‌باشد. تابع $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b,$$

تعریف می‌کنیم. محاسبه‌ی جواب واقعی دستگاه (۱۷.۱) با مینیمم کردن تابع φ روی \mathbb{R}^n معادل است [۸۸]. فرض کنید $x^{(0)}$ یک حدس اولیه‌ی برای جواب واقعی دستگاه (۱۷.۱) و $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ مانده‌ی مربوطه

^۱Flexible Generalized Minimal Residual

^۲Conjugate Gradient

باشد. در تکرار $(k+1)$ -ام از روش CG تقریب $x^{(k+1)}$ از حل مسأله‌ی

$$\varphi(x^{(k+1)}) = \min_{x=x^{(\circ)}+\delta, \delta \in \text{span}\{p^{(\circ)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\}} \varphi(x),$$

به‌دست می‌آید که در آن بردارهای $p^{(\circ)}, \dots, p^{(k)}$ معلوم هستند. الگوریتم CG به صورت ۶.۱ نوشته می‌شود.

الگوریتم ۶.۱ الگوریتم CG برای حل دستگاه $Ax = b$

حدس اولیه‌ی $x^{(\circ)}$ مفروض است. قرار دهید $r^{(\circ)} := b - Ax^{(\circ)}$ و $p^{(\circ)} := r^{(\circ)}$. به ازای $j = 0, 1, \dots$ روند زیر را تا حصول همگرایی دنباله‌ی $\{x^{(k)}\}$ تکرار کنید:

(۱) قرار دهید $\alpha_j = \frac{(r^{(j)}, r^{(j)})}{(Ap^{(j)}, p^{(j)})}$.

(۲) قرار دهید $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \alpha_j p^{(j)}$.

(۳) قرار دهید $r^{(j+1)} = r^{(j)} - \alpha_j Ap^{(j)}$.

(۴) قرار دهید $\beta_j = \frac{(r^{(j+1)}, r^{(j+1)})}{(r^{(j)}, r^{(j)})}$.

(۵) قرار دهید $p^{(j+1)} = r^{(j+1)} + \beta_j p^{(j)}$.

۵.۱ الگوریتم گرادیان مزدوج پیش‌شرط‌سازی شده (PCG)

فرض کنید ماتریس‌های A و M هر دو معین مثبت متقارن باشند و $M \approx A$. در این صورت، ماتریس ضرایب دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده‌ی $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ لزوماً متقارن نیست. بنابراین روش گرادیان مزدوج را نمی‌توان به طور مستقیم برای حل این دستگاه استفاده نمود. می‌دانیم که ماتریس $M^{-1}A$ نسبت به M -ضرب داخلی $(x, y)_M = (Mx, y) = (x, My)$ خودالحاق است، زیرا

$$\begin{aligned} (M^{-1}Ax, y)_M &= (Ax, y) = (x, Ay) = (x, M(M^{-1}A)y) \\ &= (x, M^{-1}Ay)_M. \end{aligned}$$

بنابراین کافی است که در الگوریتم گرادیان مزدوج برای دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده از چپ، بجای ضرب داخلی اقلیدسی، M -ضرب داخلی را جایگزین کنیم. در این صورت الگوریتم روش گرادیان مزدوج پیش‌شرط‌سازی شده^۱ (PCG) به صورت الگوریتم ۷.۱ خواهد بود.

۶.۱ الگوریتم مینیمم درجه (MD)

MD، الگوریتمی است که حافظه مورد نیاز برای محاسبه‌ی تجزیه چولسکی را کاهش داده و باعث کاهش عملیات محاسباتی، هنگام به کارگیری تجزیه‌ی چولسکی یا حالت ناقص آن می‌شود. این الگوریتم، قبل از

¹Preconditioned Conjugate Gradient

الگوریتم ۷.۱ الگوریتم روش گرادیان مزدوج با پیش‌شرط‌ساز چپ

حدس اولیه $x^{(0)}$ مفروض است. قرار دهید $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ ، $z^{(0)} = M^{-1}r^{(0)}$ و $p^{(0)} = z^{(0)}$. به ازای $j = 0, 1, \dots$ روند زیر را تا حصول همگرایی دنباله‌ی $\{x^{(k)}\}$ تکرار کنید:

$$(۱) \quad \alpha_j := \frac{(r^{(j)}, z^{(j)})}{(Ap^{(j)}, p^{(j)})} \quad \text{قرار دهید}$$

$$(۲) \quad x^{(j+1)} := x^{(j)} + \alpha_j p^{(j)} \quad \text{قرار دهید}$$

$$(۳) \quad r^{(j+1)} := r^{(j)} - \alpha_j Ap^{(j)} \quad \text{قرار دهید}$$

$$(۴) \quad z^{(j+1)} := M^{-1}r^{(j+1)} \quad \text{قرار دهید}$$

$$(۵) \quad \beta_j := \frac{(r^{(j+1)}, z^{(j+1)})}{(r^{(j)}, z^{(j)})} \quad \text{قرار دهید}$$

$$(۶) \quad p^{(j+1)} := z^{(j+1)} + \beta_j p^{(j)} \quad \text{قرار دهید}$$

به کارگیری تجزیه‌ی چولسکی برای یک ماتریس هرمیتی مانند A ، با استفاده از جایگشت سطرها و ستون‌ها، تعداد درایه‌های ناصفر تجزیه‌ی چولسکی را کاهش می‌دهد. در هر مرحله از این الگوریتم، جایگشت‌های سطری و ستونی در مراحل حذفی گاوس، به گونه‌ای انجام می‌شوند تا تعداد درایه‌های ناصفر در بیرون از محدوده‌ی قطری را، در محور سطری و ستونی به حداقل برسانند.

اگر ماتریس جایگشت P ، توسط الگوریتم MD برای ماتریس هرمیتی A به دست آمده باشد، آنگاه عامل تجزیه‌ی چولسکی ماتریس هرمیتی P^TAP ، دارای تعداد درایه‌های صفر کمتری نسبت به عامل تجزیه‌ی چولسکی خود ماتریس A دارد. لذا برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ توسط الگوریتم MD، ابتدا یک ماتریس جایگشت مانند P جستجو می‌شود، به طوری که تعداد درایه‌های مخالف صفر تجزیه‌ی چولسکی P^TAP دارای کمترین تعداد باشد. سپس دستگاه $(P^TAP)(P^Tx) = P^Tb$ با استفاده از تجزیه‌ی چولسکی حل می‌گردد. اگر چه الگوریتم MD به طور کلی روش موفق‌تری است، اما در حالت خاص، زمانی که ماتریس A دارای سطرها و ستون‌های چگال (یا تقریباً چگال) باشد، ممکن است زمان اجرای آن زیاد گردد. برای جزئیات این الگوریتم به [۶۶] مراجعه کنید.

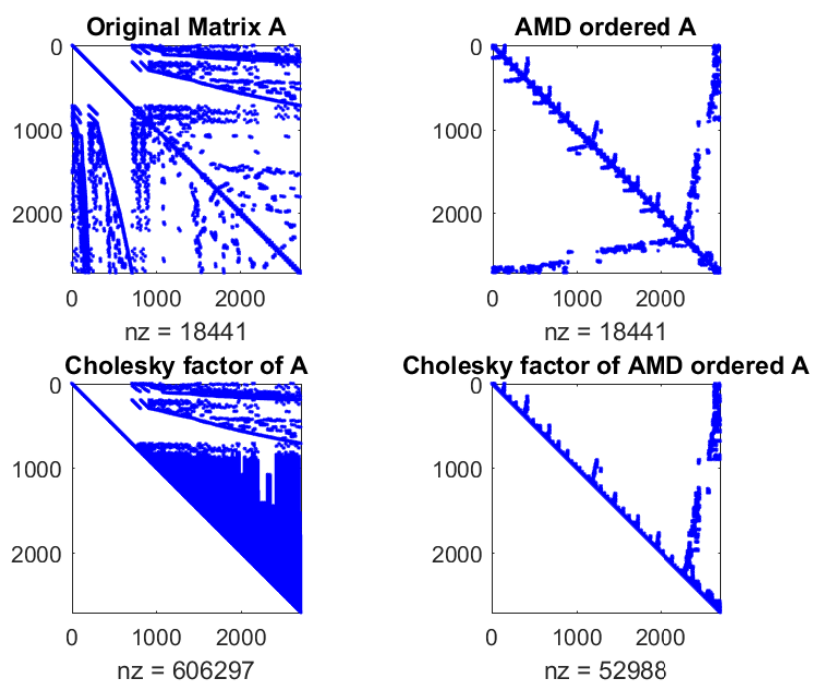
در برنامه‌ی متلب، نسخه‌های متفاوتی از الگوریتم MD با نام‌های الگوریتم تقریب MD^۱ (AMD)، الگوریتم AMD ستونی^۲ (COLAMD) و الگوریتم AMD متقارن^۳ (SYMAMD) وجود دارد. در الگوریتم‌های AMD و SYMAMD ماتریس A باید مربعی باشد. اما در الگوریتم COLAMD ماتریس A می‌تواند غیر مربعی باشد.

شکل ۶.۱، تاثیر الگوریتم MD بر تعداد درایه‌های مورد نیاز برای ذخیره‌سازی عامل تجزیه‌ی چولسکی یک ماتریس تنک را نشان می‌دهد. برای این مثال، تعداد درایه‌های مخالف صفر عامل تجزیه‌ی چولسکی با ترکیب الگوریتم مینیمم درجه، حدود یک یازدهم درایه‌های عامل تجزیه‌ی چولسکی آن بدون به کارگیری این الگوریتم می‌باشد.

^۱Approximate MD

^۳Symmetric AMD

^۲Column AMD



شکل ۱.۱: تاثیر الگوریتم AMD بر روی تعداد درایه‌های ذخیره شده عامل تجزیه‌ی چولسکی

فصل ۲

نتایجی در روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی

مقدمه

دستگاه معادلات خطی

$$Au = b, \quad (1.2)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{C}^n$. در این فصل همواره فرض می‌کنیم ماتریس A یک ماتریس معین مثبت غیرهرمیتی، تنک و از ابعاد بزرگ است. همانگونه در فصل پیش ذکر شد، برای حل چنین دستگاه‌هایی استفاده از روش‌های تکراری پیشنهاد می‌شود. بنابراین در ابتدا روش تکراری PSS را برای حل دستگاه (۱.۲) معرفی می‌کنیم و سپس حالت‌های خاصی از این روش و همچنین تعمیمی از آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۲ روش شکافت معین مثبت و پادهرمیتی (PSS)

فرض کنید S یک ماتریس هرمیتی کج دلخواه باشد. چون A یک ماتریس PD است، پس $P \equiv A - S$ نیز یک ماتریس PD است. در نتیجه ماتریس A دارای شکافت معین مثبت و پادهرمیتی به صورت

$$A = P + S, \quad P \text{ معین مثبت}, \quad S^* = -S, \quad (2.2)$$

می‌باشد. به ازای $\alpha > 0$ ، دو شکافت را برای ماتریس A ، متناظر با ماتریس S ، به صورت

$$A = (\alpha I + P) - (\alpha I - S) = (\alpha I + S) - (\alpha I - P),$$

در نظر می‌گیریم. دنباله تکراری

$$\begin{cases} (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P})\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{b}, \\ (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})\mathbf{u}^{(k+1)} = (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})} + \mathbf{b}, \end{cases} \quad (۳.۲)$$

را به ازای بردار دلخواه $\mathbf{u}^{(0)}$ تولید می‌کنیم. با توجه به این که ماتریس‌های $\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S}$ و $\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P}$ نامنفرد هستند، دستگاه‌های بالا دارای جواب یکتا می‌باشند. در هر مرحله از روند PSS، جواب هر یک از دستگاه‌ها را با استفاده از روش‌های مستقیم مانند تجزیه‌ی LU به دست می‌آوریم. در گام اول از $\mathbf{u}^{(0)}$ به عنوان حدس اولیه برای دستگاه اول استفاده کرده، سپس تقریب حاصل از این دستگاه را در دستگاه دوم به عنوان حدس اولیه به کار می‌بریم و در نهایت تقریب به دست آمده از دستگاه دوم را، در گام بعد به عنوان جواب اولیه استفاده می‌کنیم. با به دست آوردن بردار $\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})}$ از معادله اول و جایگذاری آن در معادله دوم، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k+1)} &= \mathbf{G}_{\text{PSS}}(\alpha)\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}, \\ \mathbf{G}_{\text{PSS}}(\alpha) &= (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S})(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{P}), \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

که در آن $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}\mathbf{b}$. این روش تکراری روش تجزیه‌ی معین مثبت و پادهرمیتی وابسته به شکافت (۲.۲) نامیده می‌شود. با توجه به ضریب بردار \mathbf{b} در \mathbf{c} به راحتی می‌توان دید که این روش دارای شکافتی به صورت $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ است که در آن

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\alpha}(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P}), \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{M} = \frac{1}{2\alpha}(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S})(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{P}). \quad (۵.۲)$$

در ادامه همگرایی این روش را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

لم ۱.۲. [۱۰، لم ۱۰.۲] فرض کنید

$$V(\alpha) = \|(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{P})(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}\|_2. \quad (۶.۲)$$

اگر ماتریس \mathbf{P} یک ماتریس PD باشد، آنگاه به ازای هر $\alpha > 0$ ،

$$V(\alpha) < 1.$$

چون \mathbf{S} ماتریسی هرمیتی کج است، بنابراین $(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S})(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}$ ماتریسی یکانی^۱ است. لذا

$$\|(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S})(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}\|_2 = 1$$

و در نتیجه قضیه‌ی بعدی را داریم.

قضیه ۲.۲. [۱۰، قضیه ۳.۲] فرض کنید $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس PD و دارای شکافتی به صورت (۲.۲) و $V(\alpha)$ ماتریس تعریف شده در (۶.۲) باشد. در این صورت $V(\alpha)$ یک کران بالا برای $\rho(\mathbf{G}_{\text{PSS}}(\alpha))$ است

¹Unique

و بنابراین

$$\rho(\mathbf{G}_{\text{PSS}}(\alpha)) \leq V(\alpha) < 1, \quad \alpha > 0.$$

این بدین معنی است که روش PSS به ازای هر حدس اولیه دلخواه به جواب دستگاه معادلات (۱.۲) همگراست.

توجه داشته باشید که در حالت کلی در روش PSS، نمی‌توان مقداری را برای پارامتر α ارائه کرد که توسط آن کران بالای شعاع طیفی ماتریس تکرار، یعنی مقدار $V(\alpha)$ ، مینیمم شود که این امر یکی از معایب این روش می‌باشد. از طرفی در هر گام باید دو زیر دستگاه با ماتریس ضرایب $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{P}$ و $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S}$ ، توسط روش‌های مستقیم، مانند تجزیه LU یا تجزیه چولسکی حل شوند که برای مسائل با ابعاد بزرگ نیاز به حافظه‌ی ذخیره‌سازی زیادی دارند (البته توجه داشته باشید که برای کاهش هزینه‌ی محاسبات می‌توان از تجزیه LU یا چولسکی با ترکیب AMD یا SYMAMD استفاده نمود). برای رفع مشکلات بالا، نسخه‌های مختلفی از روش PSS وجود دارد. برای به‌دست آوردن مقدار α که مقدار کران بالای شعاع طیفی را مینیمم کند، می‌توان ماتریس \mathbf{S} را به گونه‌ای یافت که ماتریس \mathbf{P} متناظر با آن، ماتریسی هرمیتی یا نرمال شود. اما برای ساده‌سازی حل زیر دستگاه‌ها، می‌توان ماتریس \mathbf{S} را به گونه‌ای در نظر گرفت که ماتریس \mathbf{P} یک ماتریس مثلثی یا مثلثی‌بلوکی گردد و در نهایت برای کاهش میزان حافظه‌ی ذخیره‌سازی، می‌توان زیر دستگاه‌ها را با استفاده از روش‌های تکراری مانند روش‌های زیرفضای کرایلف حل نمود. در این فصل نمونه‌های مختلفی از ماتریس \mathbf{S} را مورد بررسی قرار می‌دهیم و با استفاده از شکافت متناظر با آن در (۲.۲)، روش‌های تکراری مختلفی را که برای حل دستگاه (۱.۲) وجود دارند، معرفی می‌کنیم. سپس تعمیمی از روش PSS را برای حل این دستگاه، ارائه می‌دهیم. در نهایت با یک مثال، به بررسی تاثیر این روش نسبت به برخی از روش‌های ارائه شده می‌پردازیم.

۲.۲ روش PSS ناقص (IPSS)

همان‌طور که بیان شد، در هر گام از روش PSS، باید دو زیر دستگاه با استفاده از روش‌های مستقیم با ماتریس ضرایب $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{P}$ و $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S}$ حل شوند که در مسائل با ابعاد بزرگ، هم از نظر میزان حافظه‌ی ذخیره‌سازی و هم از نظر میزان محاسبات، بسیار پرهزینه خواهند بود. لذا به منظور افزایش کارایی این روش، می‌توانیم زیر دستگاه‌ها را به صورت نادقیق و با استفاده از روش‌های تکراری، مانند روش‌های زیرفضای کرایلف حل کنیم. این روش، روش IPSS نامیده می‌شود. فرض کنید

$$\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{p})} = \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{z}^{(k)},$$

که با جایگذاری در معادله‌ی اول در (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{P})\mathbf{z}^{(k)} &= (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{P})(\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{p})} - \mathbf{u}^{(k)}) \\ &= (\alpha\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{b} - (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{P})\mathbf{u}^{(k)} \\ &= \mathbf{b} - (\mathbf{P} + \mathbf{S})\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}. \end{aligned}$$

پس مقدار $\mathbf{z}^{(k)}$ از حل دستگاه

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{P})\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}, \quad (7.2)$$

حاصل می‌شود. سپس

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+\frac{1}{p})} + \mathbf{z}^{(k+\frac{1}{p})},$$

که در آن $\mathbf{z}^{(k+\frac{1}{p})}$ ، به طور مشابه با جایگذاری در رابطه‌ی دوم در (۳.۲) و از حل دستگاه

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})\mathbf{z}^{(k+\frac{1}{p})} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{p})} = \mathbf{r}^{(k+\frac{1}{p})}, \quad (8.2)$$

حاصل می‌شود. در روش IPSS، دستگاه‌های (۷.۲) و (۸.۲) را با روش‌های زیرفضای کرایلف به صورت ناقص حل می‌کنیم. در نتیجه الگوریتم ۱.۲ برای این روش به دست می‌آید.

الگوریتم ۱.۲ روش تکراری PSS ناقص (IPSS)

(۱) حدس اولیه‌ی $\mathbf{u}^{(0)}$ را انتخاب کنید.

(۲) به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ تا زمان همگرایی انجام دهید:

(آ) قرار دهید $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(k)}$.

(ب) جواب تقریبی دستگاه $(\alpha \mathbf{I} + \hat{\mathbf{P}})\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ را با استفاده از روش‌های زیرفضای کرایلف به گونه‌ای محاسبه کنید تا شرط $\|\mathbf{r}^{(k)} - (\alpha \mathbf{I} + \hat{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{z}}^{(k)}\|_p \leq \epsilon_k \|\mathbf{r}^{(k)}\|_p$ برقرار شود، که در آن ϵ_k خطای مجاز است.

(ج) قرار دهید $\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{p})} = \mathbf{u}^{(k)} + \bar{\mathbf{z}}^{(k)}$.

(د) دستگاه $\mathbf{r}^{(k+\frac{1}{p})} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{p})}$ را حل کنید.

(ه) جواب تقریبی دستگاه $(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})\mathbf{z}^{(k+\frac{1}{p})} = \mathbf{r}^{(k+\frac{1}{p})}$ را با استفاده از روش‌های زیرفضای کرایلف به گونه‌ای محاسبه کنید تا شرط $\|\mathbf{r}^{(k+\frac{1}{p})} - (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})\bar{\mathbf{z}}^{(k+\frac{1}{p})}\|_p \leq \eta_k \|\mathbf{r}^{(k+\frac{1}{p})}\|_p$ برقرار شود، که در آن η_k مقدار خطای مجاز است.

(و) $\mathbf{u}^{(k+1)} := \mathbf{u}^{(k)} + \bar{\mathbf{z}}^{(k+\frac{1}{p})}$

۳.۲ روش شکافت انتقال (SS)

دستگاه معادلات خطی (۱.۲) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathcal{S} = 0$. شکافت متناظر با این انتخاب \mathbf{S} در رابطه‌ی (۵.۲)، تجزیه‌ی انتقال-شکافت^۱ (SS) ماتریس \mathbf{A} نامیده می‌شود که به صورت

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} = \frac{1}{p}(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}) - \frac{1}{p}(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad (9.2)$$

¹Shift-Splitting

می‌باشد که در آن $\alpha > 0$ و \mathbf{I} ماتریس همانی است. بنابراین، روش تکراری متناظر با این روش به صورت

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{u}^{(k+1)} = (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10.2)$$

و ماتریس تکرار آن برابر $\mathbf{G}_{SS}(\alpha) = (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})$ خواهد بود. این روش اولین بار توسط بای در [۱۰] معرفی شده است. قضیه‌ی زیر همگرایی این روش را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۲. [۱۷، قضیه ۲.۲] فرض کنید \mathbf{A} یک ماتریس معین مثبت غیر هرمیتی، $\mathbf{A}_H = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ ، کران پایین مقادیر ویژه‌ی ماتریس هرمیتی \mathbf{A}_H برابر با $\beta_l(\mathbf{A}_H)$ و α یک عدد مثبت باشد. در این صورت،

$$\rho(\mathbf{G}_{SS}(\alpha)) \leq \delta(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta_l(\mathbf{A}_H) + \|\mathbf{A}\|_2^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta_l(\mathbf{A}_H) + \|\mathbf{A}\|_2^2}},$$

که به ازای $\alpha = \|\mathbf{A}\|_2$ کران بالای $\delta(\alpha)$ به مینیمم مقدار خود که برابر $\sqrt{\frac{\|\mathbf{A}\|_2 - \beta_l(\mathbf{A}_H)}{\|\mathbf{A}\|_2 + \beta_l(\mathbf{A}_H)}}$ است، می‌رسد.

چون ماتریس \mathbf{A}_H یک ماتریس معین مثبت است، قضیه‌ی ۳.۲ نشان می‌دهد که روش انتقال شکافت به ازای هر مقدار مثبت α همگراست. علاوه بر آن می‌توان از ماتریس $\mathfrak{B} = \mathbf{M} = \alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}$ بعنوان پیش‌شرط‌ساز برای حل دستگاه (۱.۲) استفاده کرد.

۴.۲ روش شکافت هرمیتی و پادهرمیتی (HSS)

فرض کنید $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$. در اینصورت $\mathbf{A}_H = \mathbf{A} - \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی است. شکافت متناظر با این روش، شکافت معین مثبت هرمیتی و پادهرمیتی^۱ ماتریس \mathbf{A} نامیده می‌شود. لذا

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_H + \mathbf{S}, \quad \mathbf{A}_H^* = \mathbf{A}_H, \quad \mathbf{S}^* = -\mathbf{S}. \quad (11.2)$$

به ازای $\alpha > 0$ شکافت‌های

$$\mathbf{A} = (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S}) - (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}_H) = (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}_H) - (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S}),$$

را برای ماتریس \mathbf{A} در نظر می‌گیریم و با استفاده از آنها دنباله تکراری

$$\begin{cases} (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{S})\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}_H)\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{b}, \\ (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}_H)\mathbf{u}^{(k+1)} = (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})} + \mathbf{b}, \end{cases}$$

¹Hermitian and skew-Hermitian splitting

را به ازای $\mathbf{u}^{(0)}$ دلخواه می‌سازیم. در این صورت،

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(k+1)} &= \mathbf{G}_{\text{HSS}}(\alpha)\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}, \\ \mathbf{G}_{\text{HSS}}(\alpha) &= (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}_H)^{-1}(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{S})(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A}_H),\end{aligned}\quad (12.2)$$

که در آن $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}_H)^{-1}(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}\mathbf{b}$. به راحتی می‌توان دید که این روش دارای شکافتی به صورت $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ است که در آن

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\alpha}(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S})(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}_H), \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{M} = \frac{1}{2\alpha}(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{S})(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A}_H). \quad (13.2)$$

برای بکارگیری روش HSS در هر گام باید دو زیر دستگاه با ماتریس ضرایب $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}_H$ و $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S}$ حل شوند. برای حل زیردستگاه با ماتریس ضرایب هریتی $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}_H$ ، می‌توان از روش CG یا CG با پیش‌شرط‌ساز مناسب به همراه SYMAMD و برای حل زیردستگاه با ماتریس ضرایب $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{S}$ ، از روش‌های زیرفضای کرالیف مانند GMRES استفاده نمود. قضیه‌ی زیر همگرایی این روش را نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۲. [۱۱، قضیه ۲.۲] فرض کنید $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس معین مثبت، $\mathbf{A}_H = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ قسمت هریتی و $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$ قسمت پادهرمیتی ماتریس \mathbf{A} باشند. در این صورت، به ازای هر $\alpha > 0$ ، تابع

$$\delta(\alpha) = \max_{\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}_H)} \left| \frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i} \right|,$$

یک کران بالای شعاع طیفی ماتریس تکرار روش HSS است. بنابراین

$$\rho(\mathbf{G}_{\text{HSS}}(\alpha)) \leq \delta(\alpha) < 1, \quad \forall \alpha > 0. \quad (14.2)$$

بعلاوه اگر λ_{\min} و λ_{\max} به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه ماتریس \mathbf{A}_H باشند، آنگاه

$$\alpha_* \equiv \operatorname{argmin}_{\alpha} \max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} \left| \frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} \right| = \sqrt{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}, \quad (15.2)$$

که به ازای آن

$$\delta(\alpha_*) = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}} - \sqrt{\lambda_{\min}}}{\sqrt{\lambda_{\max}} + \sqrt{\lambda_{\min}}} = \frac{\sqrt{\operatorname{cond}(\mathbf{A}_H)} - 1}{\sqrt{\operatorname{cond}(\mathbf{A}_H)} + 1}, \quad (16.2)$$

که در آن $\operatorname{cond}(\mathbf{A}_H)$ عدد شرطی ماتریس \mathbf{A}_H است. قضیه ۴.۲ نشان می‌دهد که دنباله‌ی تولید شده توسط روش تکراری HSS در (۱۲.۲)، به ازای هر $\alpha > 0$ ، به جواب دستگاه (۱.۲) همگراست و سرعت همگرایی این روش وابسته به قسمت هریتی ماتریس \mathbf{A} می‌باشد و به قسمت پادهرمیتی خود بستگی ندارد. دقت کنید که α_* یک کران بالا از شعاع طیفی ماتریس تکرار را مینیمم می‌کند و خود شعاع طیفی ماتریس تکرار را مینیمم نمی‌نماید.

۵.۲ روش شکافت نرمال و پادهرمیتی (NSS)

فرض کنید S به گونه‌ای انتخاب شود که P یک ماتریس نرمال شود. روش تکراری وابسته به چنین شکافتی را روش شکافت نرمال و پادهرمیتی^۱ (NSS) می‌نامیم و ماتریس تکرار این روش را با $G_{NSS}(\alpha)$ نشان می‌دهیم. چون P نرمال است، ماتریس‌های یکانی U و قطری Λ وجود دارند به گونه‌ای که $P = U\Lambda U^*$ که در آن $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ بنابراین

$$\begin{aligned} \rho(G_{NSS}(\alpha)) &\leq \|G_{NSS}(\alpha)\|_r = \|(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I - P)(\alpha I + P)^{-1}\|_r \\ &= \|(\alpha I - P)(\alpha I + P)^{-1}\|_r = \max_{\mu_i \in \sigma(P)} \left| \frac{\alpha - \mu_i}{\alpha + \mu_i} \right| \\ &= \begin{cases} \max \left\{ \frac{(\alpha - \gamma_{\max})^2 + \eta_{\max}^2}{(\alpha + \gamma_{\max})^2 + \eta_{\max}^2}, \frac{(\alpha - \gamma_{\min})^2 + \eta_{\max}^2}{(\alpha + \gamma_{\min})^2 + \eta_{\max}^2} \right\}, & \eta_{\max} < \sqrt{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}, \\ \frac{(\alpha - \gamma_{\max})^2 + \eta_{\max}^2}{(\alpha + \gamma_{\max})^2 + \eta_{\max}^2}, & \eta_{\max} \geq \sqrt{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}, \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن γ_{\min} و γ_{\max} به ترتیب کران‌های پایین و بالای قسمت حقیقی مقادیر ویژه‌ی ماتریس \bar{P} هستند ([۱۲] را ببینید) و

$$\eta_{\max} = \max\{|\Im(\lambda)| : \lambda \in \sigma(\bar{P})\}.$$

از این رو

$$\alpha_* = \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}} \delta(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\gamma_{\min} \gamma_{\max} - \eta_{\max}^2}, & \eta_{\max} < \sqrt{\gamma_{\max} \gamma_{\min}}, \\ \sqrt{\gamma_{\min}^2 + \eta_{\max}^2}, & \eta_{\max} \geq \sqrt{\gamma_{\max} \gamma_{\min}}. \end{cases}$$

به ویژه اگر P یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه $\eta_{\max} = 0$ و بنابراین مقداری که برای پارامتر α در روش HSS پیشنهاد شد، به دست می‌آید.

۶.۲ روش PSS توسعه یافته (EPSS)

در اینجا تعمیمی از روش PSS را ارائه می‌کنیم. فرض کنید S یک ماتریس پادهرمیتی دلخواه و A یک ماتریس معین مثبت باشد که ماتریس شکافت معین مثبت و پادهرمیتی متناظر با آنها به صورت (۲.۲) است و علاوه فرض کنید Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی دلخواه باشد.

¹Normal and skew-Hermitian splitting

فصل ۳

نتایجی در مسائل نقطه زینی

۱.۳ مقدمه

مسائل نقطه زینی تعمیم یافته^۱

$$Au \equiv \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \equiv b, \quad (۱.۳)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ نیمه معین مثبت غیر هرمیتی، $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $f \in \mathbb{C}^n$ و $g \in \mathbb{C}^m$. فرض می‌کنیم ماتریس‌های A ، B و C تنک و از ابعاد بزرگ هستند. مسائل نقطه زینی تعمیم یافته دارای کاربردهای متنوعی در علوم و مهندسی می‌باشند ([۲۲، ۴] را ببینید). فرض کنید D یک ماتریس نیمه معین منفی و A یک ماتریس نیمه معین مثبت باشد. آنگاه مسئله نقطه زینی

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix},$$

با انتخاب $g = -h$ و $C = -D$ مسئله نقطه زینی

$$\begin{bmatrix} A & -D^* \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix},$$

با انتخاب $B = -D$ به مسئله نقطه زینی تعمیم یافته (۱.۳) تبدیل می‌شود. از این رو، فقط به حل مسائل نقطه زینی تعمیم یافته به صورت (۱.۳) می‌پردازیم.

در این فصل، ابتدا کاربردهایی از مسائل نقطه زینی تعمیم یافته را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی وجود و یکتایی جواب این مسائل می‌پردازیم و شرایط لازم و کافی را برای وجود و یکتایی جواب ارائه می‌کنیم. پس از آن، برخی از روش‌ها و پیش‌شرط‌سازهای مختلفی را که برای حل این‌گونه مسائل معرفی شده‌اند، مورد مطالعه قرار داده و چند روش جدید را برای حل مسائل نقطه زینی (۱.۳) ارائه می‌دهیم. سپس روش تکراری EPSS و پیش‌شرط‌ساز وابسته به آن را برای حل مسائل نقطه زینی تعمیم یافته معرفی می‌کنیم. همگرایی و نیمه همگرایی

¹Generalized Saddle Point Problem

این روش، مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس به ذکر برخی از روش‌هایی می‌پردازیم که حالت‌های خاصی از این روش می‌باشند. بنابراین، همگرایی و نیمه همگرایی این روش‌ها نیز اثبات می‌گردد. یکی از حالت‌های ویژه از این روش را مورد مطالعه قرار داده و نتایجی را برای آن به دست می‌آوریم. با استفاده از مثال‌های عددی، رفتار و عملکرد این روش با برخی روش‌های دیگر مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.

۲.۳ برخی از کاربردها

در این بخش به برخی از کاربردهای مسائل نقطه زینی اشاره می‌کنیم.

۱.۲.۳ مسائل بهینه‌سازی نقطه زینی

مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم مقید

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & B^T x = d, \end{aligned} \quad (2.3)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس معین مثبت متقارن، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ یک ماتریس رتبه کامل سطری، $c \in \mathbb{R}^n$ و $d \in \mathbb{R}^m$ است. تابع لاگرانژ^۱ آن به صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y) &= f(x) + y^T (B^T x - d) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T B y - x^T c - y^T d \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $y \in \mathbb{R}^m$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y) &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j + \sum_{k=1}^m B_{ik} y_k - c_i \right) - \sum_{k=1}^m y_k d_k \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j - c_i \right) - \sum_{k=1}^m y_k \left(\sum_{j=1}^n B_{k,j}^T x_j - d_k \right). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(x, y) &= e_j^T (A x + B y - c), \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_k}(x, y) &= -e_k^T (B^T x - d), \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

¹Lagrangian

لذا اولین شرط بهینگی بصورت

$$\begin{aligned} Ax + By - c &= 0, \\ -B^T x + d &= 0. \end{aligned}$$

خواهد بود که معادل با حل دستگاه

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

می باشد. اگر $[x_*, y_*]$ جواب دستگاه (۳.۳) باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_*, y_*) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در نتیجه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$ داریم

$$\mathcal{L}(x, y) - \mathcal{L}(x_*, y_*) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \end{bmatrix} \right).$$

حال اگر $y = y_*$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}(x, y_*) - \mathcal{L}(x_*, y_*) = \frac{1}{2} (x - x_*)^T A (x - x_*) \geq 0,$$

و اگر $x = x_*$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}(x_*, y) - \mathcal{L}(x_*, y_*) = 0.$$

بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$ داریم

$$\mathcal{L}(x_*, y) \leq \mathcal{L}(x_*, y_*) \leq \mathcal{L}(x, y_*).$$

از این رو

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(x_*, y_*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}(x, y).$$

لذا هر جواب دستگاه (۳.۳) بصورت $[x_*, y_*]$ یک نقطه زینی برای تابع لاگرانژین $\mathcal{L}(x, y)$ می باشد که بردار x_* آن جواب مساله‌ی (۲.۳) می باشد.

۲.۲.۳ مسائل کمترین مربعات

دسته‌ای از مسائل کمترین مربعات وجود دارند که به حل مسائل نقطه زینی ارتباط پیدا می‌کنند.

(۱) فرض کنید $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^n$. مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم

$$\|Bx_* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Bx - b\|_2,$$

را در نظر بگیرید. x_* جواب این مسأله است اگر و تنها اگر در دستگاه معادلات خطی

$$B^T Bx = B^T b,$$

صدق کند. معادله‌ی فوق را دستگاه معادلات نرمال می‌گویند که معادل با

$$B^T(b - Bx) = 0,$$

است. با فرض $r = b - Bx$ داریم $B^T r = 0$. در نتیجه داریم

$$\begin{cases} r + Bx = b, \\ B^T r = 0, \end{cases}$$

که معادل با مسأله‌ی نقطه زینی زیر است

$$\begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(۲) مسأله‌ی محاسبه‌ی مینیمم نرم جواب $x_* \in \mathbb{R}^m$ ، برای یک سیستم نامشخص از دستگاه معادلات خطی

$$\|x_*\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \|x\|_2,$$

$$\text{s.t. } B^T x = d,$$

که در آن $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $d \in \mathbb{R}^n$. اگر $\text{rank}(B) = n$ ، آنگاه $B^T x = d$ سازگار و دارای جواب یکتاست و این جواب با استفاده از حل معادلات نرمال

$$B^T Bx = d, \quad x = Bx, \quad (4.3)$$

به دست می‌آید که معادل با مسأله‌ی نقطه زینی زیر است

$$\begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

(۳) مسأله‌ی کم‌ترین مربعات مقید

$$\begin{aligned} \|c - By_*\|_Y &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|c - By\|_Y, \\ \text{s.t.} \quad Cy &= d, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید که به حل مسأله‌ی نقطه زینی

$$\begin{bmatrix} I & \circ & B \\ \circ & \circ & C \\ B^T & C^T & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ \circ \end{bmatrix},$$

منجر می‌شود.

(۴) فرض کنید A ماتریس معین مثبت متقارن و $\text{rank}(B) = n$ و $c \in \mathbb{R}^m$. چون ماتریس A معین مثبت متقارن است، پس A^{-1} نیز یک ماتریس معین مثبت متقارن است و می‌توانیم مسأله‌ی کم‌ترین مربعات کلی

$$\begin{aligned} \|c - By_*\|_{A^{-1}} &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|c - By\|_{A^{-1}}, \\ \text{s.t.} \quad Cy &= d, \end{aligned}$$

را در نظر بگیریم که جواب آن از حل معادله‌ی نرمال $B^T A^{-1} B y = B^T A^{-1} c$ به دست می‌آید. با فرض $x = A^{-1}(c - By)$ معادلات نرمال این مسأله با مسأله‌ی نقطه زینی

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \circ \end{bmatrix},$$

معادل می‌شود.

نتیجه گیری

در این رساله، ابتدا به حل یک دستگاه معادلات خطی که ماتریس ضرایب آن نیمه معین مثبت هرمیتی هستند، پرداخته و یک تعمیم از روش تکراری شکافت معین مثبت و پادهرمیتی به نام EPSS، به همراه پیش شرطساز وابسته به آن، برای حل این دستگاه معادلات معرفی شده است که در آن یک ماتریس معین مثبت هرمیتی Σ بعنوان ماتریس انتقال، به جای ماتریس اسکالر αI ، در روش شکافت معین مثبت و پادهرمیتی در نظر گرفته شده است. همگرایی و نیمه همگرایی این روش، برای حل چنین دستگاه‌هایی بررسی شده است. نشان داده شده که اگر ماتریس ضرایب دستگاه، معین مثبت هرمیتی باشند، این روش، بدون هیچ محدودیتی روی Σ ، همگرا می‌باشد. اما اگر این روش، برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب نیمه معین مثبت هرمیتی به کار گرفته شود، آنگاه ممکن است همگرایی و نیمه همگرایی وجود نداشته باشد. اگرچه نشان داده شده که در این حالت، تمام مقادیر ویژه ماتریس تکرار، درون و روی دایره‌ای به شعاع ۱ قرار می‌گیرند و لذا می‌توان از پیش شرطساز وابسته به این روش، بعنوان پیش شرطسازی برای روش‌های تکراری زیرفضای کرایلف استفاده کرد. در ادامه زمانی که $\Sigma = \alpha Q$ ، فرمولی برای به دست آوردن پارامتر بهینه‌ای که کران بالای شعاع طیفی ماتریس تکرار روش را مینیمم می‌کند، ارائه شد و سپس، به معرفی چندین روش تکراری با ماتریس انتقال معین مثبت هرمیتی $\Sigma = \alpha Q$ و محاسبه پارامتر بهینه در آنها پرداخته شده است. با ارائه نتایج عددی، تاثیر ماتریس انتقال معین مثبت هرمیتی، بر روی رفتار روش شکافت معین مثبت هرمیتی و پادهرمیتی و روش‌های وابسته به آن، به همراه پیش شرطسازهای متناظر با آنها، مشخص شده است. ملاحظه می‌شود که هر چه ماتریس انتقال معین مثبت هرمیتی Σ به قسمت معین مثبت هرمیتی ماتریس نزدیکتر شود، آنگاه شعاع طیفی ماتریس تکرار کاهش یافته که باعث کاهش تعداد تکرارها در بکارگیری این روش‌ها، برای حل یک دستگاه معادلات خطی می‌گردد. از سویی این امر باعث افزایش خوشه شدن مقادیر ویژه ماتریس پیش شرطسازی شده در اطراف نقطه $(1, 0)$ به دور از $(0, 0)$ شده که به موجب آن، تعداد تکرارها در روش شروع مجدد $GMRES(m)$ کاهش می‌یابد. هر چند که در حالت کلی، ممکن است زمان حل به دست آوردن جواب افزایش یابد، اما می‌توان با انتخاب مناسب ماتریس انتقال Σ در روش SEPSS، سرعت همگرایی این روش تکراری و پیش شرطساز وابسته به آن را بهبود بخشید.

در ادامه به بررسی مسائل نقطه زینی تعمیم یافته پرداخته و شرایط وجود و یکتایی جواب آن را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. سپس تعمیمی از روش تجزیه انتقال-شکافت، برای حل مسائل نقطه زینی تعمیم یافته با بلوک $(1, 1)$ معین مثبت و بلوک $(2, 2)$ نیمه معین مثبت هرمیتی به همراه یک نسخه تعدیل یافته آن، ارائه شد و نتایجی برای پیش شرطساز این روش و نسخه تعدیل یافته آن، برای حل مسائل نقطه زینی، به دست آمد. در ادامه یک حالت منظم‌سازی شده از روش تجزیه معین مثبت هرمیتی و پادهرمیتی به نام REHSS، برای حل مسائل نقطه زینی معرفی گردید و نتایجی پیرامون این روش به همراه پیش شرطساز وابسته به آن، برای حل مسائل نقطه زینی ارائه شد. با ارائه مثال‌هایی، رفتار این پیش شرطساز با پیش شرطسازهای HSS و RHSS که

برای حل مسائل نقطه زینی معرفی شده‌اند، مورد آزمون قرار گرفت که نتیجه آن عملکرد خوب پیش‌شرط‌ساز REHSS در مقایسه با این دو پیش‌شرط ساز بود.

سپس روش EPSS و پیش‌شرط‌ساز وابسته به آن، برای حل مسائل نقطه زینی تعمیم یافته معرفی شد. نشان داده شد که این روش، یک تعمیم از بسیاری روش‌ها و پیش‌شرط‌سازهایی است که برای حل مسائل نقطه زینی معرفی شده‌اند. شرایط همگرایی و نیمه همگرایی این روش به دست آمد. اگرچه روش EPSS شامل حالت‌های مختلف بسیاری می‌شود، اما یک حالت خاص از این روش در نظر گرفته شد و پارامترهای بهینه برای این روش به دست آمد. با ارائه مثال‌هایی، رفتار پیش‌شرط‌ساز این روش در مقایسه با برخی روش‌های موجود برای حل مسائل نقطه زینی، مورد آزمون قرار گرفت که نتایج عددی، حاکی از عملکرد مطلوب این پیش‌شرط‌ساز، نسبت به سایر پیش‌شرط‌سازهای دیگر داشت.

همانطور که اشاره شد، پیش‌شرط‌ساز SEPSS تنها یک حالت خاص از شکل کلی ارائه شده است و بهترین انتخاب ممکن نیست. بنابراین هنوز امکان بهبود یا پیشنهاد یک پیش‌شرط‌ساز کاراتر وجود دارد. بنابراین در آینده، می‌توان روی این موضوع تمرکز نمود.

کتاب نامه

- [1] AMINTOOSI, M., FATHY, M., AND MOZAYANI, N. Precise image registration with structural similarity error measurement applied to super-resolution. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing 2009* (2009), 7 pages. Article ID 305479.
- [2] AMINTOOSI, M., FATHY, M., AND MOZAYANI, N. Regional varying image super-resolution. in *IEEE International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization* (Sanya, China, April 23-26 2009), volume 1, pp. 913–917.
- [3] ARIOLI, M., AND MANZINI, G. A null space algorithm for mixed finite-element approximations of Darcy’s equation. *Communications in numerical methods in engineering* 18, 9 (2002), 645–657.
- [4] BAI, Z.-Z. Structured preconditioners for nonsingular matrices of block two-by-two structures. *Mathematics of Computation* 75, 254 (2006), 791–815.
- [5] BAI, Z.-Z. Optimal parameters in the HSS-like methods for saddle-point problems. *Numerical Linear Algebra with Applications* 16, 6 (2009), 447–479.
- [6] BAI, Z.-Z., AND BENZI, M. Regularized HSS iteration methods for saddle-point linear systems. *BIT Numerical Mathematics* 57, 2 (2017), 287–311.
- [7] BAI, Z.-Z., BENZI, M., AND CHEN, F. On preconditioned MHSS iteration methods for complex symmetric linear systems. *Numerical Algorithms* 56, 2 (2011), 297–317.
- [8] BAI, Z.-Z., GOLUB, G., AND LI, C.-K. Convergence properties of preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite matrices. *Mathematics of Computation* 76, 257 (2007), 287–298.
- [9] BAI, Z.-Z., AND GOLUB, G. H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems. *IMA Journal of Numerical Analysis* 27, 1 (2007), 1–23.

- [10] BAI, Z.-Z., GOLUB, G. H., LU, L.-Z., AND YIN, J.-F. Block triangular and skew-Hermitian splitting methods for positive-definite linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing* 26, 3 (2005), 844–863.
- [11] BAI, Z.-Z., GOLUB, G. H., AND NG, M. K. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 24, 3 (2003), 603–626.
- [12] BAI, Z.-Z., GOLUB, G. H., AND NG, M. K. On successive-overrelaxation acceleration of the Hermitian and skew-Hermitian splitting iterations. *Numerical Linear Algebra with Applications* 14, 4 (2007), 319–335.
- [13] BAI, Z.-Z., GOLUB, G. H., AND PAN, J.-Y. Preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite linear systems. *Numerische Mathematik* 98, 1 (2004), 1–32.
- [14] BAI, Z.-Z., NG, M. K., AND WANG, Z.-Q. Constraint preconditioners for symmetric indefinite matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 31, 2 (2009), 410–433.
- [15] BAI, Z.-Z., PARLETT, B. N., AND WANG, Z.-Q. On generalized successive overrelaxation methods for augmented linear systems. *Numerische Mathematik* 102, 1 (2005), 1–38.
- [16] BAI, Z.-Z., AND WANG, Z.-Q. On parameterized inexact Uzawa methods for generalized saddle point problems. *Linear Algebra and its Applications* 428, 11-12 (2008), 2900–2932.
- [17] BAI, Z.-Z., YIN, J.-F., AND SU, Y.-F. A shift-splitting preconditioner for non-Hermitian positive definite matrices. *Journal of Computational Mathematics* 24, 4 (2006), 539–552.
- [18] BAKER, S., AND KANADE, T. Limits on super-resolution and how to break them. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 24, 9 (2002), 1167–1183.
- [19] BENZI, M. Solution of equality-constrained quadratic programming problems by a projection iterative method. *Rendiconti di Matematica* 13 (1993), 275–296.
- [20] BENZI, M. Preconditioning techniques for large linear systems: a survey. *Journal of computational Physics* 182, 2 (2002), 418–477.
- [21] BENZI, M. A generalization of the Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 31, 2 (2009), 360–374.

- [22] BENZI, M., AND GOLUB, G. H. A preconditioner for generalized saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26, 1 (2004), 20–41.
- [23] BENZI, M., AND GUO, X.-P. A dimensional split preconditioner for Stokes and linearized Navier–Stokes equations. *Applied Numerical Mathematics* 61, 1 (2011), 66–76.
- [24] BENZI, M., NG, M., NIU, Q., AND WANG, Z. A relaxed dimensional factorization preconditioner for the incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics* 230, 16 (2011), 6185–6202.
- [25] BETTS, J., AND KOLMANOVSKY, I. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. *Applied Mechanics Reviews* 55 (2002), B68.
- [26] BJORCK, A. *Numerical methods for least squares problems*, volume 51. SIAM, 1996.
- [27] BORMAN, S. *Topics in Multiframe Superresolution Restoration*. Ph.D. thesis, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, May 2004.
- [28] BRAMBLE, J. H., PASCIAK, J. E., AND VASSILEV, A. T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34, 3 (1997), 1072–1092.
- [29] BREZZI, F., AND FORTIN, M. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [30] BROWN, P. N., AND WALKER, H. F. GMRES on (nearly) singular systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 18, 1 (1997), 37–51.
- [31] CAO, Y. Regularized DPSS preconditioners for non-Hermitian saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 84 (2018), 96–102.
- [32] CAO, Y., DU, J., AND NIU, Q. Shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 272 (2014), 239–250.
- [33] CAO, Y., LI, S., AND YAO, L.-Q. A class of generalized shift-splitting preconditioners for nonsymmetric saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 49 (2015), 20–27.
- [34] CAO, Y., AND MIAO, S.-X. On semi-convergence of the generalized shift-splitting iteration method for singular nonsymmetric saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 71, 7 (2016), 1503–1511.

- [35] CAO, Y., TAN, W.-W., AND JIANG, M.-Q. A generalization of the positive-definite and skew-Hermitian splitting iteration. *Numerical Algebra, Control & Optimization* 2, 4 (2012), 811–821.
- [36] CAO, Z.-H. Positive stable block triangular preconditioners for symmetric saddle point problems. *Applied numerical mathematics* 57, 8 (2007), 899–910.
- [37] CHAO, Z., CHEN, G., AND GUO, Y. On the semi-convergence of regularized HSS iteration methods for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 76, 2 (2018), 438–450.
- [38] CHEN, C.-R., AND MA, C.-F. A generalized shift-splitting preconditioner for singular saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 269 (2015), 947–955.
- [39] CHEN, C., AND MA, C. A generalized shift-splitting preconditioner for saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 43 (2015), 49–55.
- [40] CHEN, F. On choices of iteration parameter in HSS method. *Applied Mathematics and Computation* 271 (2015), 832–837.
- [41] DATTA, B. N. *Numerical linear algebra and applications*, volume 116. SIAM, 2010.
- [42] DE STURLER, E., AND LIESEN, J. Block-diagonal and constraint preconditioners for nonsymmetric indefinite linear systems. Part I: Theory. *SIAM Journal on Scientific Computing* 26, 5 (2005), 1598–1619.
- [43] ELMAN, H. C. Preconditioners for saddle point problems arising in computational fluid dynamics. *Applied Numerical Mathematics* 43, 1-2 (2002), 75–89.
- [44] ELMAN, H. C., SILVESTER, D. J., AND WATHEN, A. J. Performance and analysis of saddle point preconditioners for the discrete steady-state Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik* 90, 4 (2002), 665–688.
- [45] FAN, H.-T., AND ZHU, X.-Y. A generalized relaxed positive-definite and skew-Hermitian splitting preconditioner for non-Hermitian saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 258 (2015), 36–48.
- [46] FORTIN, M., AND GLOWINSKI, R. *Augmented Lagrangian methods: applications to the numerical solution of boundary-value problems*, volume 15. Elsevier, 2000.

- [47] GILL, P. E., MURRAY, W., PONCELEÓN, D. B., AND SAUNDERS, M. A. Preconditioners for indefinite systems arising in optimization. *SIAM journal on matrix analysis and applications* 13, 1 (1992), 292–311.
- [48] GILL, P. E., MURRAY, W., AND WRIGHT, M. H. *Practical optimization*. Academic press, 1981.
- [49] GOLUB, G. H., WU, X., AND YUAN, J.-Y. SOR-like methods for augmented systems. *BIT Numerical Mathematics* 41, 1 (2001), 71–85.
- [50] GONZALEZ, R. C., AND WOODS, R. E. *Digital Image Processing*, 3rd ed. . Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2006.
- [51] GOULD, N. I., HRIBAR, M. E., AND NOCEDAL, J. On the solution of equality constrained quadratic programming problems arising in optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing* 23, 4 (2001), 1376–1395.
- [52] HORN, R. A., HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 1990.
- [53] HUANG, Y.-M. A practical formula for computing optimal parameters in the HSS iteration methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 255 (2014), 142–149.
- [54] HUANG, Z.-G., WANG, L.-G., XU, Z., AND CUI, J.-J. A generalized variant of the deteriorated PSS preconditioner for nonsymmetric saddle point problems. *Numerical Algorithms* 75, 4 (2017), 1161–1191.
- [55] JIANG, M.-Q., CAO, Y., AND YAO, L.-Q. On parameterized block triangular preconditioners for generalized saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 216, 6 (2010), 1777–1789.
- [56] KELLER, C., GOULD, N. I., AND WATHEN, A. J. Constraint preconditioning for indefinite linear systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 21, 4 (2000), 1300–1317.
- [57] KHALIGHI, V. Category theory. Master’s thesis, Sydney Univ., April 2007.
- [58] LI, W.-W., AND WANG, X. A modified GPSS method for non-positive definite linear systems. *Applied Mathematics and Computation* 234 (2014), 253–259.
- [59] LIANG, Z.-Z., AND ZHANG, G.-F. Semi-convergence analysis of preconditioned deteriorated PSS iteration method for singular saddle point problems. *Numerical Algorithms* 78, 2 (2018), 379–404.

- [60] LUKŠAN, L., AND VLČEK, J. Indefinitely preconditioned inexact Newton method for large sparse equality constrained non-linear programming problems. *Numerical linear algebra with applications* 5, 3 (1998), 219–247.
- [61] MURPHY, M. F., GOLUB, G. H., AND WATHEN, A. J. A note on preconditioning for indefinite linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing* 21, 6 (2000), 1969–1972.
- [62] PAN, J.-Y., NG, M. K., AND BAI, Z.-Z. New preconditioners for saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 172, 2 (2006), 762–771.
- [63] PERUGIA, I., AND SIMONCINI, V. Block-diagonal and indefinite symmetric preconditioners for mixed finite element formulations. *Numerical linear algebra with applications* 7, 7-8 (2000), 585–616.
- [64] REN, Z.-R., CAO, Y., AND NIU, Q. Spectral analysis of the generalized shift-splitting preconditioned saddle point problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 311 (2017), 539–550.
- [65] SAAD, Y., AND SCHULTZ, M. H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and statistical computing* 7, 3 (1986), 856–869.
- [66] SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*, volume 82. SIAM, 2003.
- [67] SALKUYEH, D. K. The Picard–HSS iteration method for absolute value equations. *Optimization Letters* 8, 8 (2014), 2191–2202.
- [68] SALKUYEH, D. K., MASOUDI, M., AND HEZARI, D. On the generalized shift-splitting preconditioner for saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 48 (2015), 55–61.
- [69] SALKUYEH, D. K., MASOUDI, M., AND HEZARI, D. A preconditioner based on the shift-splitting method for generalized saddle point problems. in *46th Annual Iranian Mathematics Conference* (Yazd, Iran, Aug. 2015), volume 1, Yazd University, pp. 1061–1064.
- [70] SALKUYEH, D. K., AND RAHIMIAN, M. A modification of the generalized shift-splitting method for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 74, 12 (2017), 2940–2949.

- [71] SHEN, Q.-Q., AND SHI, Q. Generalized shift-splitting preconditioners for nonsingular and singular generalized saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 72, 3 (2016), 632–641.
- [72] SHEN, S.-Q. A note on PSS preconditioners for generalized saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 237 (2014), 723–729.
- [73] SHI, Q., SHEN, Q.-Q., AND YAO, L.-Q. Eigenvalue bounds of the shift-splitting preconditioned singular nonsymmetric saddle-point matrices. *Journal of Inequalities and Applications* 269 (2015), 947–955.
- [74] SHOKOOHI, F., ed. . *Proceedings of the Xth Conference on XYZ* (October 2006).
- [75] SIMONCINI, V. Block triangular preconditioners for symmetric saddle-point problems. *Applied Numerical Mathematics* 49, 1 (2004), 63–80.
- [76] SIMONCINI, V., AND BENZI, M. Spectral properties of the Hermitian and skew-Hermitian splitting preconditioner for saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26, 2 (2004), 377–389.
- [77] STRANG, G., AND AARIKKA, K. *Introduction to applied mathematics*, volume 16. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1986.
- [78] WANG, R.-R., NIU, Q., MA, F., AND LU, L.-Z. Spectral properties of a class of matrix splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 298 (2016), 138–151.
- [79] WARSA, J. S., BENZI, M., WAREING, T. A., AND MOREL, J. E. Preconditioning a mixed discontinuous finite element method for radiation diffusion. *Numerical Linear Algebra with Applications* 11, 8-9 (2004), 795–811.
- [80] WU, X., GOLUB, G. H., CUMINATO, J. A., AND YUAN, J. Y. Symmetric-triangular decomposition and its applications part ii: Preconditioners for indefinite systems. *BIT Numerical Mathematics* 48, 1 (2008), 139–162.
- [81] XIE, Y.-J., AND MA, C.-F. A modified positive-definite and skew-Hermitian splitting preconditioner for generalized saddle point problems from the Navier-Stokes equation. *Numerical Algorithms* 72, 1 (2016), 243–258.
- [82] ZHENG, Q., AND LU, L. Extended shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 313 (2017), 70–81.

- [83] ZHOU, R., WANG, X., AND TANG, X.-B. A generalization of the Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration method for solving Sylvester equations. *Applied Mathematics and Computation* 271 (2015), 609–617.
- [۸۴] استالینگ، ویلیام. اصول طراحی و ویژگیهای داخلی سیستمهای عامل، ویرایش سوم. ترجمه‌ی صدیقی مشکنانی، محسن، و پدرام، حسین، ویراستار برنجکوب، محمود. نشر شیخ بهایی، اصفهان، بهار ۱۳۸۰.
- [۸۵] امیدعلی، مهدی. تابع هیلبرت. پایان‌نامه دکترا، دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تیر ۱۳۸۲.
- [۸۶] امین‌طوسی، محمود، مزینی، ناصر، و فتحی، محمود. افزایش وضوح ناحیه‌ای. در چهاردهمین کنفرانس ملی سالانه انجمن کامپیوتر ایران (تهران، ایران، اسفند ۱۳۸۷)، دانشگاه امیرکبیر، صفحات ۱۰۸–۱۰۱.
- [۸۷] خجسته سالکویه، داود. جبر خطی عددی. انتشارات جهاد دانشگاهی، ۱۳۹۵.
- [۸۸] خجسته سالکویه، داود. روش‌های عددی در جبر خطی. انتشارات دانشگاه گیلان، ۱۳۹۶.
- [۸۹] خلیقی، وفا. زی‌پرشین (X_zPersian): بسته فارسی برای حروف‌چینی در L^AT_EX₂e، ۱۳۸۷.
- [۹۰] واحدی، مصطفی. موضوعی جدید در هندسه محاسباتی. مجله فارسی نمونه ۱، ۲ (آبان ۱۳۸۷)، ۳۰–۲۲.
- [۹۱] پورموسی، امیرمسعود. یک موضوع فیزیک. پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، مرداد ۱۳۸۸. (در حال انجام).

پیوست الف

نمونه الگوریتم‌ها و جداول مختلف

چند نمونه الگوریتم:

الگوریتم الف ۱. الگوریتم روش GMRES(m) با پیش شرط‌ساز راست

(۱) قرار دهید $r_0 = b - Ax_0$ ، $\beta = \|r_0\|_2$ و $v_1 = r_0/\beta$.

(۲) برای $j = 1, 2, \dots, m$ ، روند زیر را تکرار کنید:

(آ) قرار دهید $z_j = M^{-1}v_j$.

(ب) قرار دهید $w := Az_j$.

(ج) به ازای $j, i = 1, 2, \dots, j$ ، روند زیر را تکرار کنید:

• قرار دهید $h_{ij} = (w, v_i)$.

• قرار دهید $w := w - h_{ij}v_i$.

(د) $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ و $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$ محاسبه کنید.

(۳) تعریف کنید $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$ و $\bar{H}_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq j+1, 1 \leq j \leq m}$.

(۴) $y_m = \operatorname{argmin}_y \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$ و $x_m = x_0 + Z_m y_m$ را محاسبه کنید.

(۵) اگر جواب تقریبی محاسبه شده در شرط توقف صدق می‌کند، متوقف شوید و در غیر این صورت قرار دهید $x_0 = x_m$ و به گام ۱ بروید.

Algorithm .3 IEPSS method

1. Choose an initial guess \mathbf{u}^0
 2. For $k = 0, 1, 2, \dots$, until convergence, Do
 - 2.i. Compute $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^k$
 - 2.ii. Solve $(\Sigma + \hat{\mathcal{P}})\mathbf{z}^k = \mathbf{r}^k$ by a Krylov subspace method to compute the approximate solution $\bar{\mathbf{z}}^k$ satisfying $\|\mathbf{r}^k - (\Sigma + \hat{\mathcal{P}})\bar{\mathbf{z}}^k\| \leq \epsilon_k \|\mathbf{r}^k\|$, where ϵ_k is a given tolerance
 - 2.iii. $\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}} := \mathbf{u}^k + \bar{\mathbf{z}}^k$
 - 2.iv. Compute $\mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}}$
 - 2.v. Solve $(\Sigma + \mathcal{S})\mathbf{z}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}}$ by a Krylov subspace method to compute the approximate solution $\bar{\mathbf{z}}^{k+\frac{1}{2}}$ satisfying $\|\mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}} - (\Sigma + \mathcal{S})\bar{\mathbf{z}}^{k+\frac{1}{2}}\| \leq \eta_k \|\mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}}\|$, where η_k is a given tolerance
 - 2.vi. $\mathbf{u}^{k+1} := \mathbf{u}^k + \bar{\mathbf{z}}^{k+\frac{1}{2}}$
-

به هر یک از گاهای بالا می‌توان ارجاع داد. به طور مثال در اینجا به گام ۲ ارجاع می‌دهیم.

Algorithm .4 Computation $y = x^n$.

Require: $n \geq 0$

Ensure: $y = x^n$

```

 $y \leftarrow 1$ 
 $X \leftarrow x$ 
 $N \leftarrow n$ 
while  $N \neq 0$  do
  if  $N$  is even then
     $X \leftarrow X \times X$ 
     $N \leftarrow N/2$ 
  else  $\{N \text{ is odd}\}$ 
     $y \leftarrow y \times X$ 
     $N \leftarrow N - 1$ 
  end if
end while

```

الگوریتم الف ۵. الگوریتم هم‌رنگ‌سازی چندباند.

ورودی: تصاویر A و B .خروجی: تصویر S حاصل از نیمه‌ی سمت چپ A و نیمه‌ی سمت راست B ۱: هر مهای لاپلاسین LA, LB از تصاویر A, B ساخته می‌شوند.۲: هرم لاپلاسین سومی به نام LS با کپی کردن نیمه‌های سمت چپ LA و سمت راست LB ساخته۳: تصویر نهایی S با گسترش هر سطح هرم LS و جمع آن با سطح بعدی حاصل خواهد شد.۴: اگر $\circ \text{mod}(a, 2) ==$ آنگاه۵: چاپ کن a زوج است.

۶: درغیراینصورت

۷: چاپ کن a فرد است.

۸: پایان اگر.

الف ۱. نمونه جدول

در ادامه نمونه‌های مختلفی را از جدول‌های مختلف می‌بینید.

جدول الف ۱: مشخصات ماتریس‌های A و B به ازای شبکه‌های مختلف.

Gride	مسأله جریان درون کانال				مسأله حفره با درپوش متحرک و مسأله برخورد جریان			
	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$
16×16	578	192	6,698	2,084	578	190	6,178	1,967
32×32	2178	768	29,546	10,142	2,178	766	28,418	9,868
64×64	8,450	3,072	124,550	45,062	8,450	3,070	122,206	44,516
128×128	33,282	12,288	511,152	192,174	33,282	12,286	506,376	191,084
256×256	132,098	49,152	207,0764	791,738	132,098	49,150	206,1140	789,560

جدول الف ۲: مشخصات کلی ماتریس‌های A, B و C برای آزمون‌ها.

	Grid or Pixel	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$nnz(C)$	$cond(A)$
Example 1	32×32	2178	1022	16818	7682	3064	9.88e+03
	64×64	8450	4094	70450	31746	12280	8.62e+04
	128×128	33282	16382	288306	129026	49144	1.38e+06
	256×256	132098	65534	1166386	520194	196600	2.20e+07
Example 2	32×32	2178	1022	16818	7682	3064	1.40e+06
	64×64	8450	4094	70450	31746	12280	2.21e+07
	128×128	33282	16382	288306	129026	49144	3.52e+08
	256×256	132098	65534	1166386	520194	196600	5.62e+09
Example 3	256×256	65536	65536	65536	5966336	196096	8.77e+06
	480×640	307200	307200	307200	29395200	920320	8.77e+06

تغییر اندازه جدول با تغییر عدد $\backslash \text{scalebox} \{ \}$ به $\backslash \text{scalebox} \{ \}$.

جدول الف ۳: مشخصات کلی ماتریس‌های A ، B و C برای آزمون‌ها.

	Grid or Pixel	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$nnz(C)$	$cond(A)$
Example 1	32×32	2178	1022	16818	7682	3064	9.88e+03
	64×64	8450	4094	70450	31746	12280	8.62e+04
	128×128	33282	16382	288306	129026	49144	1.38e+06
	256×256	132098	65534	1166386	520194	196600	2.20e+07
Example 2	32×32	2178	1022	16818	7682	3064	1.40e+06
	64×64	8450	4094	70450	31746	12280	2.21e+07
	128×128	33282	16382	288306	129026	49144	3.52e+08
	256×256	132098	65534	1166386	520194	196600	5.62e+09
Example 3	256×256	65536	65536	65536	5966336	196096	8.77e+06
	480×640	307200	307200	307200	29395200	920320	8.77e+06

جدول الف ۴: شمع طیفی و مقدار پارامتر پیشنهادی.

	$\Sigma = \alpha Q_j$	Q_1				Q_2				Q_3			
n	P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4
400	α_*	21.3270	26.8701	21.2969	363.9214	0.8525	1.0000	0.8530	1.5236	0.9868	1.1724	1.0000	1.1766
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.8889	0.9109	0.8905	0.9931	0.2819	0.3732	0.2817	0.5224	0.0816	0.2817	0.0030	0.0866
800	α_*	30.1292	37.9737	30.0820	726.1630	0.8527	1.0000	0.8530	1.5228	0.9864	1.1724	1.0000	1.1785
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9201	0.9361	0.9214	0.9966	0.2818	0.3732	0.2817	0.5222	0.0828	0.2817	0.0015	0.0847
1600	α_*	42.5868	53.6843	42.5167	1450.6479	0.8529	1.0000	0.8530	1.5224	0.9862	1.1724	1.0000	1.1795
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9428	0.9544	0.9438	0.9983	0.2817	0.3732	0.2817	0.5221	0.0833	0.2817	0.0008	0.0837
3200	α_*	60.2109	75.9078	60.1095	2899.6183	0.8529	1.0000	0.8530	1.5222	0.9861	1.1724	1.0000	1.1800
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9592	0.9675	0.9599	0.9991	0.2817	0.3732	0.2817	0.5220	0.0836	0.2817	0.0004	0.0832
6400	$\alpha_*^{(i,j)}$	85.1399	107.3406	84.9948	5797.5595	0.8529	1.0000	0.8530	1.5221	0.9861	1.1724	1.0000	1.1802
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9710	0.9769	0.9715	0.9996	0.2817	0.3732	0.2817	0.5220	0.0838	0.2817	0.0002	0.0830

جدول الف ۵: تکرار و زمان محاسبه برای روش IEPSS.

	$\Sigma = \alpha Q_j$				Q_1				Q_2				Q_3						
n	P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4		
فرآیند	400	CPU	0.20	0.11	0.12	0.37	0.08	0.03	0.04	0.06	0.05	0.04	0.02	0.06	0.05	0.04	0.02	0.06	
		IT	113	104	128	1076	9	9	8	13	6	8	4	7					
	800	CPU	0.15	0.11	0.12	0.61	0.06	0.09	0.13	0.08	0.07	0.05	0.02	0.15					
		IT	159	147	182	1850	8	10	8	12	6	8	3	7					
	1600	CPU	0.43	0.18	0.20	2.18	0.10	0.08	0.12	0.14	0.12	0.14	0.04	0.37					
		IT	223	206	257	3098	8	10	7	11	6	8	3	7					
پیش‌پردازش	3200	CPU	1.69	0.48	1.39	5.06	1.04	0.39	0.42	1.26	0.47	0.38	0.25	2.30					
		IT	314	291	362	4993	8	9	7	11	6	8	3	7					
	6400	CPU	3.53	1.56	3.05	11.59	2.18	1.91	1.24	2.65	1.67	1.03	0.84	6.13					
		IT	442	413	511	7586	8	8	7	11	6	8	3	7					
	پس‌پردازش	400	CPU	0.22	0.07	0.07	0.05	0.06	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.02	0.05				
			IT	40	39	37	77	7	9	7	8	6	8	4	5				
800		CPU	0.11	0.06	0.08	0.08	0.07	0.04	0.06	0.06	0.08	0.06	0.04	0.14					
		IT	58	55	40	99	8	9	7	8	7	8	4	5					
1600		CPU	0.22	0.08	0.12	0.11	0.09	0.07	0.10	0.09	0.13	0.08	0.09	0.35					
		IT	80	59	57	143	8	9	7	7	7	8	5	5					
پس‌پردازش	3200	CPU	1.33	0.40	0.51	0.34	0.33	0.31	0.47	0.37	0.50	0.38	0.49	1.26					
		IT	94	70	73	205	9	10	7	7	8	11	5	5					
	6400	CPU	3.72	0.41	0.93	0.70	1.55	1.37	0.98	0.72	1.21	0.97	2.01	4.29					
		IT	129	73	73	280	8	12	7	6	10	13	5	5					

سطرهای جدول را می‌توانید رنگی کنید. البته این جدول هنگام ارائه مناسب است تا اینکه در پایان نامه قرار گیرد

\taburowcolors[] {blue!..yellow!}

این دستور رنگ آبی ۴۰ را با رنگ زرد ۸۰ به ۵ قسمت تقسیم می‌کند و آن را از سطر چهارم جدول به بعد به کار می‌گیرد. (در ابتدای جدول سطرهایی وجود دارند که دیده نمی‌شوند.)

جدول الف ۶: مشخصات ماتریس‌های A و B به ازای شبکه‌های مختلف.

Gride	مسئله جریان درون کانال				مسئله حفره با درپوش متحرک و مسئله برخورد جریان			
	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$
16×16	578	192	6,698	2,084	578	190	6,178	1,967
32×32	2178	768	29,546	10,142	2,178	766	28,418	9,868
64×64	8,450	3,072	124,550	45,062	8,450	3,070	122,206	44,516
128×128	33,282	12,288	511,152	192,174	33,282	12,286	506,376	191,084
256×256	132,098	49,152	207,0764	791,738	132,098	49,150	206,1140	789,560

\taburowcolors[] {white!..blue!}

رنگ ۱۰۰ سفید تا رنگ ۱۰ آبی به سه قسمت تقسیم می‌شود و از سطر ۶ به بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمونه جداول دیگر

جدول الف ۷: نتایج عددی برای مسئله جریان درون کانال با شبکه $2^r \times 2^r$.

r	Preconditioner	$\alpha = 10^{-4}$		$\alpha = 10^{-2}$		$\alpha = 1$		$\alpha = 10^2$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
4	\mathcal{P}_{HSS}	5	0.05	6	0.06	7	0.07	17	0.21
	\mathcal{P}_{RHSS}	3	0.02	3	0.03	3	0.02	4	0.03
	\mathcal{P}_{REHSS}	3	0.02	3	0.02	3	0.02	3	0.02
5	\mathcal{P}_{HSS}	9	0.48	10	0.5	13	0.72	47	2.84
	\mathcal{P}_{RHSS}	5	0.22	5	0.22	5	0.2	9	0.47
	\mathcal{P}_{REHSS}	5	0.21	3	0.09	3	0.07	3	0.06
6	\mathcal{P}_{HSS}	21	5.94	13	3.46	28	8.39	498	154.59
	\mathcal{P}_{RHSS}	8	2.08	8	2.06	8	1.96	21	6.15
	\mathcal{P}_{REHSS}	6	1.45	3	0.4	3	0.4	3	0.38
7	\mathcal{P}_{HSS}	48	96.57	15	28.06	83	169.45	320	1089.81
	\mathcal{P}_{RHSS}	17	32.79	16	30.53	15	28.83	86	178.1
	\mathcal{P}_{REHSS}	5	7.45	3	2.84	3	2.65	3	2.52
8	\mathcal{P}_{HSS}	169	3093.67	20	336.76	-	‡	-	‡
	\mathcal{P}_{RHSS}	42	758.74	37	654.38	34	603.85	-	‡
	\mathcal{P}_{REHSS}	4	40.52	3	24.29	3	22.11	2	16.03

جدول الف ۸: مشخصات کلی ماتریس‌های A ، B و C برای آزمون‌ها.

	Grid or Pixel	n	m	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$nnz(C)$	$cond(A)$
Example 1	32×32	2178	1022	16818	7682	3064	9.88e+03
	64×64	8450	4094	70450	31746	12280	8.62e+04
	128×128	33282	16382	288306	129026	49144	1.38e+06
	256×256	132098	65534	1166386	520194	196600	2.20e+07
Example 2	32×32	2178	1022	16818	7682	3064	1.40e+06
	64×64	8450	4094	70450	31746	12280	2.21e+07
	128×128	33282	16382	288306	129026	49144	3.52e+08
	256×256	132098	65534	1166386	520194	196600	5.62e+09
Example 3	256×256	65536	65536	65536	5966336	196096	8.77e+06
	480×640	307200	307200	307200	29395200	920320	8.77e+06

جدول الف ۹: نتایج عددی برای مسأله حفره با درپوش متحرک با شبکه $2^r \times 2^r$

		$\alpha = 10^{-4}$		$\alpha = 10^{-2}$		$\alpha = 1$		$\alpha = 10^2$	
r	Precon.	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
16×16	\mathcal{P}_{HSS}	4	0.04	5	0.06	13	0.16	106	1.46
	\mathcal{P}_{RHSS}	3	0.02	3	0.02	3	0.02	4	0.04
	\mathcal{P}_{REHSS}	3	0.02	3	0.02	3	0.02	3	0.02
32×32	\mathcal{P}_{HSS}	8	0.37	9	0.45	144	8.45	†	-
	\mathcal{P}_{RHSS}	5	0.19	5	0.2	5	0.21	9	0.43
	\mathcal{P}_{REHSS}	5	0.21	4	0.12	3	0.07	3	0.07
64×64	\mathcal{P}_{HSS}	14	3.87	47	14.21	†	-	†	-
	\mathcal{P}_{RHSS}	8	1.97	8	2.03	9	2.29	27	8.1
	\mathcal{P}_{REHSS}	11	3.08	3	0.47	3	0.42	3	0.39
128×128	\mathcal{P}_{HSS}	38	76.32	†	-	†	-	†	-
	\mathcal{P}_{RHSS}	15	30.85	14	25.95	17	33.46	79	160.91
	\mathcal{P}_{REHSS}	9	17.3	3	3.86	3	3.69	3	3.86
256×256	\mathcal{P}_{HSS}	115	2064.44	-	††	-	†	-	†
	\mathcal{P}_{RHSS}	37	641.5	28	471.97	38	648.74	-	†
	\mathcal{P}_{REHSS}	5	67.63	3	33.11	3	31.91	3	27.43

جدول الف ۱۰: پیش شرطسازهای خاصی از پیش شرطساز \mathcal{P}_{EPSS}

مرجع	همگرایی و نیمه همگرایی	پیش شرطساز	P_β	P_α	C	B	A	$B_P = B$
[۲۲]	همگرا	\mathcal{P}_{HSS}	αI	αI	SPSD	رتبه کامل	PD	
[۷۶]	همگرا	\mathcal{P}_{HSS}	αI	αI	SPSD	رتبه کامل	SPSD	
		\mathcal{P}_{GHSS}	βI	αI	HPSD		HPD	
		\mathcal{P}_{EHSS}	βQ_2	αQ_1	HPSD		HPD	
[۶]	همگرا	\mathcal{P}_{RHSS}	$\alpha I + Q$	αI	°	رتبه کامل	HPD	
[۳۷]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{RHSS}	$\alpha I + Q$	αI	°	رتبه ناقص	HPD	
[۱۳]	همگرا	\mathcal{P}_{PHSS}	αQ	αA	°	رتبه کامل	HPD	
[۹]	همگرا	\mathcal{P}_{AHSS}	βQ	αA	°	رتبه کامل	HPD	
[۶۲]	همگرا	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	αI	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۷۲]	همگرا	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	αI	αI	HPSD	رتبه کامل	PD	
[۷۸، ۵۴]	همگرا	\mathcal{P}_{GPSS}	βI	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۵۹]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{EPSS}(\mathcal{P}_{PDPS})$	βQ_2	αQ_1	°	رتبه ناقص	PD	$B_P = \circ$
[۳۱]	همگرا	\mathcal{P}_{RPSS}	$\alpha I + Q$	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۳۲]	همگرا	\mathcal{P}_{SS}	αI	αI	°	رتبه کامل	HPD	
[۶۴، ۳۸]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه کامل	SPD	
[۶۸]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل	SPD	
[۳۴]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه ناقص	PD	
[۷۳]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه ناقص	SPD	
[۷۱]	نیمه همگرا و همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل و ناقص	PD	
[۶۸]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل	SPD	
[۶۹]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل	PD	
[۳۳]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۸۲]	همگرا	\mathcal{P}_{ESS}	Q_2	Q_1	°	رتبه کامل	SPD	
[۷۰]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{ESS}	βQ_2	αQ_1	°	رتبه ناقص	PD	

الف ۲. خروجی متلب به عنوان دستورات \LaTeX

تمام جدول زیر یک خروجی از متلب است. با دستورهای print در متلب، می‌توان خروجی متلب را دستورهای ورودی یک جدول در لاتک قرار داد. از این رو مشکلی در گرد کردن یا جایگذاری اشتباه داده‌ها بوجود نمی‌آید.

جدول الف ۱۱: نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال ؟؟.

	Grid	Prec.	GSS	GHSS	GPSS	ESS	EHSS	EPSS	SS	HSS	PSS	SEPSS	SEPSS*	SEPSS**
GMRES	32×32	t_α	-3.75	-2.00	-2.00	-3.50	-0.75	-0.75	-4.00	-2.25	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-2.50	-2.50	-3.75	-0.75	-0.75	-4.00	-2.25	-2.25	0.00	0.41	0.14
		IT	6	54	56	3	52	54	6	61	74	17	22	17
		CPU	0.03	0.11	0.08	0.02	0.12	0.08	0.02	0.14	0.10	0.02	0.04	0.04
		E_K	1.8e-07	3.2e-07	2.3e-07	3.8e-07	1.9e-07	4.1e-07	1.5e-08	3.1e-07	3.5e-07	4.8e-08	4.2e-08	1.9e-08
		R_K	7.9e-10	8.8e-10	9.1e-10	7.3e-10	8.0e-10	9.5e-10	6.9e-11	7.5e-10	9.6e-10	4.3e-10	5.9e-10	6.6e-10
	64×64	t_α	-4.00	-2.25	-2.25	-4.00	-1.00	-1.00	-4.00	-2.50	-2.75	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-3.75	-3.75	-3.75	-1.25	-1.25	-4.00	-2.50	-2.75	0.00	0.41	0.29
		IT	9	92	92	3	90	90	9	199	156	17	23	20
		CPU	0.20	1.31	0.56	0.14	1.50	0.55	0.21	3.62	1.16	0.14	0.16	0.14
		E_K	9.8e-08	7.1e-07	6.9e-07	1.1e-06	7.2e-07	6.5e-07	9.8e-08	5.3e-06	4.0e-06	7.1e-07	4.6e-07	6.1e-08
		R_K	1.7e-10	8.7e-10	8.7e-10	6.5e-10	9.6e-10	8.8e-10	1.7e-10	9.3e-10	8.7e-10	7.7e-10	7.7e-10	5.7e-10
	128×128	t_α	-4.00	-2.50	-2.50	-3.75	-1.25	-1.25	-4.00	-	-3.50	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-4.00	-4.00	-3.75	-1.50	-1.75	-4.00	-	-3.50	0.00	0.39	0.41
		IT	17	231	235	4	163	164	17	†	430	19	25	26
		CPU	1.91	18.80	6.36	1.12	15.55	4.41	1.89	-	10.86	0.86	0.95	0.96
		E_K	2.3e-07	3.0e-05	3.2e-05	1.9e-06	5.6e-06	4.4e-07	2.3e-07	-	1.2e-05	2.2e-06	9.0e-06	6.8e-05
		R_K	3.1e-10	9.6e-10	9.7e-10	4.9e-10	9.6e-10	9.9e-10	3.1e-10	-	9.9e-10	6.1e-10	6.9e-10	8.1e-10
	256×256	t_α	-4.00	-	-	-4.00	-1.25	-1.25	-4.00	-	-	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-	-	-4.00	-2.00	-2.00	-4.00	-	-	0.00	0.37	0.45
		IT	44	†	†	4	243	242	44	†	†	24	41	42
		CPU	12.69	-	-	10.57	129.01	31.72	13.11	-	-	7.49	7.15	7.17
		E_K	1.6e-04	-	-	1.1e-05	8.0e-06	8.0e-06	1.6e-04	-	-	1.2e-05	5.6e-06	1.7e-05
		R_K	9.0e-10	-	-	7.7e-10	9.9e-10	1.0e-09	9.0e-10	-	-	5.5e-10	9.9e-10	7.9e-10
FGMRES	32×32	t_α	-4.00	-2.00	-2.00	-3.50	-0.75	-0.75	-3.25	-2.25	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-2.50	-2.50	-2.50	-2.25	-1.00	-0.75	-3.25	-2.25	-2.25	0.00	0.41	0.14
		IT	7	38	39	17	37	39	9	43	53	14	18	14
		CPU	0.27	0.50	0.51	1.03	0.59	0.48	0.50	1.86	0.77	0.31	0.51	0.34
		E_K	9.1e-06	3.6e-05	2.7e-05	2.4e-05	1.8e-05	1.0e-05	4.8e-06	2.6e-05	6.5e-05	2.2e-06	2.2e-06	4.5e-06
		R_K	9.7e-08	9.5e-08	9.7e-08	9.3e-08	8.5e-08	9.5e-08	4.1e-08	7.6e-08	9.1e-08	8.0e-08	8.6e-08	9.7e-08
	64×64	t_α	-4.00	-2.25	-2.00	-3.50	-1.00	-0.75	-3.50	-2.50	-2.75	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-3.00	-3.75	-3.75	-2.25	-1.25	-1.25	-3.50	-2.50	-2.75	0.00	0.41	0.29
		IT	11	60	64	32	61	61	13	156	113	17	20	18
		CPU	3.95	12.73	7.83	12.09	13.60	7.13	4.94	22.79	14.45	3.47	4.21	3.97
		E_K	3.8e-06	5.4e-05	7.8e-05	7.5e-05	8.6e-05	4.8e-05	2.7e-05	8.9e-04	6.1e-04	2.0e-05	3.8e-06	8.4e-06
		R_K	2.4e-08	9.7e-08	9.7e-08	8.2e-08	9.8e-08	9.9e-08	7.6e-08	9.2e-08	9.7e-08	2.9e-08	7.6e-08	9.1e-08
	128×128	t_α	-4.00	-2.50	-2.50	-3.75	-1.00	-1.00	-4.00	-	-3.75	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-3.50	-4.00	-4.00	-2.75	-1.50	-1.75	-4.00	-	-3.75	0.25	0.39	0.41
		IT	19	134	134	36	109	112	22	†	352	21	33	34
		CPU	22.46	97.70	54.23	42.84	92.32	74.07	26.45	-	381.79	18.28	33.25	33.73
		E_K	4.2e-04	3.1e-03	3.2e-03	2.4e-04	3.4e-04	1.1e-04	1.4e-03	-	3.7e-04	2.4e-04	7.7e-03	3.7e-03
		R_K	9.0e-08	9.9e-08	9.9e-08	9.8e-08	9.4e-08	9.6e-08	8.0e-08	-	9.9e-08	8.5e-08	9.7e-08	8.2e-08
	256×256	t_α	-4.00	-	-	-3.50	-	-1.25	-4.00	-	-	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-3.25	-	-	-2.75	-	-1.75	-4.00	-	-	0.25	0.37	0.45
		IT	60	-	-	37	-	194	63	-	-	38	39	39
		CPU	458.14	††	††	276.00	††	947.80	462.32	††	††	228.54	224.71	231.07
		E_K	4.5e-02	-	-	4.3e-03	-	6.8e-03	1.4e-01	-	-	4.8e-03	1.1e-02	1.4e-02
		R_K	8.5e-08	-	-	9.6e-08	-	9.3e-08	9.0e-08	-	-	7.7e-08	7.4e-08	6.6e-08

دستور \naviO، در این جدول، یک دستور با ۹ آرگومان ورودی، برای تولید ۹ ستون اول و دستور \naviS با سه آرگومان ورودی، برای تولید سه ستون آخر است که به صورت زیر تعریف شده‌اند.

```
\newcommand{\naviO}[۹]{\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#}
\newcommand{\naviS}[۳]{\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#}
```

با تغییر تعریف این دو دستور هر کدام از ستون‌های غیر لازم را می‌توان حذف نمود یا ترتیب قرار گرفتن آنها را عوض کرد. مثلاً برای حذف ستون‌های سوم، چهارم، ششم، هفتم و نهم دستور \naviO را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

```
\newcommand{\naviO}[]{\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#\&\#}
```

و برای جابجایی دو ستون آخر دستور \naviS را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

(الف ۱) \newcommand{\naviS}[][\&\#\&\#\&\#]

جدول الف ۱۲: نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال ؟؟.

	Grid	Prec.	GSS	GHSS	EHSS	HSS	SEPSS	SEPSS**	SEPSS*
GMRES	32 × 32	t_α	-3.75	-2.00	-0.75	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-2.50	-0.75	-2.25	0.00	0.14	0.41
		IT	6	54	52	61	17	17	22
		CPU	0.03	0.11	0.12	0.14	0.02	0.04	0.04
		E_K	1.8e-07	3.2e-07	1.9e-07	3.1e-07	4.8e-08	1.9e-08	4.2e-08
		R_K	7.9e-10	8.8e-10	8.0e-10	7.5e-10	4.3e-10	6.6e-10	5.9e-10
	64 × 64	t_α	-4.00	-2.25	-1.00	-2.50	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-3.75	-1.25	-2.50	0.00	0.29	0.41
		IT	9	92	90	199	17	20	23
		CPU	0.20	1.31	1.50	3.62	0.14	0.14	0.16
		E_K	9.8e-08	7.1e-07	7.2e-07	5.3e-06	7.1e-07	6.1e-08	4.6e-07
		R_K	1.7e-10	8.7e-10	9.6e-10	9.3e-10	8.1e-10	5.7e-10	7.7e-10
	128 × 128	t_α	-4.00	-2.50	-1.25	-	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-4.00	-1.50	-	0.00	0.41	0.39
		IT	17	231	163	†	19	26	25
		CPU	1.91	18.80	15.55	-	0.86	0.96	0.95
		E_K	2.3e-07	3.0e-05	5.6e-06	-	2.2e-06	6.8e-05	9.0e-06
		R_K	3.1e-10	9.6e-10	9.6e-10	-	6.1e-10	8.1e-10	6.9e-10
	256 × 256	t_α	-4.00	-	-1.25	-	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-4.00	-	-2.00	-	0.00	0.45	0.37
		IT	44	†	243	†	24	42	41
		CPU	12.69	-	129.01	-	7.49	7.17	7.15
		E_K	1.6e-04	-	8.0e-06	-	1.2e-05	1.7e-05	5.6e-06
		R_K	9.0e-10	-	9.9e-10	-	5.5e-10	7.9e-10	9.9e-10
FGMRES	32 × 32	t_α	-4.00	-2.00	-0.75	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-2.50	-2.50	-1.00	-2.25	0.00	0.14	0.41
		IT	7	38	37	43	14	14	18
		CPU	0.27	0.50	0.59	1.86	0.31	0.34	0.51
		E_K	9.1e-06	3.6e-05	1.8e-05	2.6e-05	2.2e-06	4.5e-06	2.2e-06
		R_K	9.7e-08	9.5e-08	8.5e-08	7.6e-08	8.0e-08	9.7e-08	8.6e-08
	64 × 64	t_α	-4.00	-2.25	-1.00	-2.50	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-3.00	-3.75	-1.25	-2.50	0.00	0.29	0.41
		IT	11	60	61	156	17	18	20
		CPU	3.95	12.73	13.60	22.79	3.47	3.97	4.21
		E_K	3.8e-06	5.4e-05	8.6e-05	8.9e-04	2.0e-05	8.4e-06	3.8e-06
		R_K	2.4e-08	9.7e-08	9.8e-08	9.2e-08	2.9e-08	9.1e-08	7.6e-08
	128 × 128	t_α	-4.00	-2.50	-1.00	-	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-3.50	-4.00	-1.50	-	0.25	0.41	0.39
		IT	19	134	109	†	21	34	33
		CPU	22.46	97.70	92.32	-	18.28	33.73	33.25
		E_K	4.2e-04	3.1e-03	3.4e-04	-	2.4e-04	3.7e-03	7.7e-03
		R_K	9.0e-08	9.9e-08	9.4e-08	-	8.5e-08	8.2e-08	9.7e-08
	256 × 256	t_α	-4.00	-	-	-	-4.00	-4.00	-4.00
		t_β	-3.25	-	-	-	0.25	0.45	0.37
		IT	60	-	-	-	38	39	39
		CPU	458.14	††	††	††	228.54	231.07	224.71
		E_K	4.5e-02	-	-	-	4.8e-03	1.4e-02	1.1e-02
		R_K	8.5e-08	-	-	-	7.7e-08	6.6e-08	7.4e-08

توجه کنید که در فایل تکس، هر دو جدول یکی هستند. و داده‌ها در این جدول نیز وجود دارند. اما در خروجی ظاهر نمی‌شوند. بعضی مواقع نیاز است که برخی از داده‌های در جدول دیده نشوند، اما داده‌ها هم وجود داشته باشند. ممکن است بعداً این داده‌ها از شما خواسته شود و شما مجبور به ارائه آنها شوید. در این صورت کافیت دستور \navierOTHER تغییر کند و در نتیجه نیاز به تغییر مجدد جدول نمی‌باشد.

نمادهای اختصاری

ح

$A \otimes B$ حاصل ضرب کرونکر ماتریس‌های A و B

ش

$\rho(A)$ شعاع طیفی ماتریس A

$\nu(A)$ شعاع طیفی ویژه‌ی ماتریس A

ف

$\text{range}(A)$ فضای برد ماتریس A

$\text{nul}(A)$ فضای پوچ ماتریس A

ق

$\text{diag}(A)$ قطر ماتریس A

م

$\sigma(A)$ مجموعه‌ی مقادیر ویژه ماتریس A

ن

$\|A\|_*$ نرم طبیعی ماتریس A

$\text{norm}(A)$ نرم طیفی ماتریس A

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

Approximate MD	الگوریتم تقریب MD
Minimum-degree algorithm	الگوریتم مینیمم درجه
Column AMD	الگوریتم AMD ستونی
Symmetric AMD	الگوریتم AMD متقارن
Flexible Generalized Minimal Residual	الگوریتم GMRES انعطاف‌پذیر
Shift-Splitting	انتقال-شکافت

ب

Upper Hessenberg	بالاهسنبرگ
Dimension	بعد

پ

Lower Hessenberg	پایین‌هسنبرگ
Preconditioner	پیش‌شرط‌ساز
Preconditioned	پیش‌شرط‌سازی‌شده

ت

Successive overrelaxation	تخفیف متوالی
---------------------------	--------------

ر

SOR-like	روش شبه SOR
Conjugate Gradient	روش گرادیان مزدوج
Preconditioned Conjugate Gradient	روش گرادیان مزدوج پیش‌شرط‌سازی‌شده
Modified HSS	روش HSS بهبودیافته
Inexact HSS	روش HSS ناقص
Extended PSS	روش PSS تعمیم‌یافته
Inexact PSS	روش PSS ناقص
Generalized SOR	روش SOR تعمیم‌یافته

ز

Krylov Subspace زیرفضای کرایلف

ش

Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting شکافت معین مثبت و پاد هرmitی

Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting شکافت معین مثبت هرmitی و پاد هرmitی

Normal and skew-Hermitian splitting شکافت نرمال و پاد هرmitی

م

Generalized Minimal Residual مانده مینیمال تعمیم یافته

Random Variable متغیر تصادفی

Symmetric متقارن

Skew-Symmetric متقارن کج

Saddle Point Problem مسئله نقطه زینی

Positive Definite معین مثبت

Hermitian Positive Definite معین مثبت هرmitی

ن

Positive Semi Definite نیمه معین مثبت

Hermitian Positive Semi Definite نیمه معین مثبت هرmitی

ه

Hermitian هرmitی

Skew-Hermitian هرmitی کج

ی

Unique یکانی

واژه‌یاب فارسی

ز	ا
زیرفضای کرایلف ۱۴، ۲۶، ۲۸، ۲۹، ۴۰، ۴۱، ۵۲، ۵۵، ۵۳	الگوریتم تقریب MD ۴۸، ۴۹، ۵۲
	الگوریتم مینیمم درجه ۱۴، ۴۸
ش	الگوریتم AMD ستونی ۴۸
شکافت معین مثبت و پاد هرمیتی ۲۷، ۵۰-۵۳	الگوریتم AMD متقارن ۴۸، ۵۲
شکافت معین مثبت هرمیتی و پاد هرمیتی ۲۷، ۲۸، ۵۴	الگوریتم GMRES انعطاف پذیر ۴۶
	انتقال-شکافت ۵۳
شکافت نرمال و پادهرمیتی ۵۶	ب
م	بالاهسنبرگ ۳۱
مانده مینیمال تعمیم یافته ۸، ۲۶، ۲۷، ۴۰، ۴۶	بعد ۱۴
متغیر تصادفی ۱۴	پ
متقارن ۳۰	پایین هسنبرگ ۳۱
متقارن کج ۳۰	پیش شرط ساز ۲۶، ۲۷
مسئله نقطه زینی ۶، ۷، ۱۵	پیش شرط سازی شده ۱۴-۱۶، ۲۶
معین مثبت ۳۰، ۵۰، ۵۱	ت
معین مثبت هرمیتی ۳۰	تخفیف متوالی ۲۶
ن	ر
نیمه معین مثبت ۱۵	روش شبه SOR ۲۸
نیمه معین مثبت هرمیتی ۳۰	روش گرادیان مزدوج ۴۶، ۴۷
ه	روش گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده ۴۷
هرمیتی ۳۰	روش HSS بهبود یافته ۲۷
هرمیتی کج ۳۰، ۵۰، ۵۱	روش HSS ناقص ۲۷
ی	روش PSS تعمیم یافته ۲۹، ۵۶
یکانی ۵۱	روش PSS ناقص ۱۴، ۵۲، ۵۳
	روش SOR تعمیم یافته ۲۸

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Approximate MD الگوریتم تقریب MD

C

Column AMD الگوریتم AMD ستونی

Conjugate Gradient روش گرادیان مزدوج

D

Dimension بعد

E

Extended PSS روش PSS تعمیم یافته

F

Flexible Generalized Minimal Residual الگوریتم GMRES انعطاف پذیر

G

Generalized Minimal Residual مانده مینیمال تعمیم یافته

Generalized SOR روش SOR تعمیم یافته

H

Hermitian هرمیتی

Hermitian Positive Definite معین مثبت هرمیتی

Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting شکافت معین مثبت هرمیتی و
پاد هرمیتی

Hermitian Positive Semi Definite نیمه معین مثبت هرمیتی

I

Inexact HSS روش HSS ناقص

Inexact PSS روش PSS ناقص

K

Krylov Subspace زیرفضای کرایلف

L

Lower Hessenberg پایین هسنبرگ

M

Minimum-degree algorithm الگوریتم مینیمم درجه

Modified HSS روش HSS بهبودیافته

N

Normal and skew-Hermitian splitting شکافت نرمال و پادهرمیتی

P

Positive Definite معین مثبت

Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting شکافت معین مثبت و پادهرمیتی

Positive Semi Definite نیمه معین مثبت

Preconditioned پیش شرط سازی شده

Preconditioned Conjugate Gradient روش گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده

Preconditioner پیش شرط ساز

R

Random Variable متغیر تصادفی

S

Saddle Point Problem مسئله نقطه زینی

Shift-Splitting انتقال-شکافت

Skew-Hermitian هرمیتی کج

Skew-Symmetric متقارن کج

SOR-like روش شبه SOR

Successive overrelaxation تخفیف متوالی

Symmetric متقارن

Symmetric AMD الگوریتم AMD متقارن

U

Unique یکانی

Upper Hessenberg بالاهسنبرگ

فهرست اختصارات

A

AMD الگوریتم تقریب MD

C

COLAMD الگوریتم AMD ستونی

CG روش گرادیان مزدوج

E

EPSS روش PSS تعمیم یافته

F

FGMRES الگوریتم GMRES انعطاف پذیر

G

GMRES مانده مینیمال تعمیم یافته

GSOR روش SOR تعمیم یافته

H

HPD معین مثبت هرمیتی

HSS شکافت معین مثبت هرمیتی و پاد هرمیتی

HPSD نیمه معین مثبت هرمیتی

I

IHSS روش HSS ناقص

IPSS روش PSS ناقص

M

MD الگوریتم مینیمم درجه

MHSS روش HSS بهبود یافته

N

NSS شکافت نرمال و پاد هرمیتی

P

PD	معین مثبت
PSS	شکافت معین مثبت و پاد هر میتی
PSD	نیمه معین مثبت
PCG	روش گرادیان مزدوج پیش شرط سازی شده

S

SS	انتقال-شکافت
SOR	تخفیف متوالی
SYMAMD	الگوریتم AMD متقارن

واژه‌یاب انگلیسی

A

Approximate MD [48](#), [49](#), [52](#)

C

Column AMD [48](#)

Conjugate Gradient [46](#), [47](#)

D

Dimension [14](#)

E

Extended PSS [29](#), [56](#)

F

Flexible Generalized Minimal Residual [46](#)

G

Generalized Minimal Residual [8](#), [26](#), [27](#), [40](#), [46](#)

Generalized SOR [28](#)

H

Hermitian [30](#)

Hermitian Positive Definite [30](#)

Hermitian Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting [27](#), [28](#), [54](#)

Hermitian Positive Semi Definite [30](#)

I

Inexact HSS [27](#)

Inexact PSS [14](#), [52](#), [53](#)

K

Krylov Subspace [14](#), [26](#), [28](#), [29](#), [40](#), [41](#), [52](#), [53](#), [55](#)

L

Lower Hessenberg [31](#)

M

Minimum-degree algorithm [14](#), [48](#)

Modified HSS [27](#)

N

Normal and skew-Hermitian splitting [56](#)

P

Positive Definite [30](#), [50](#), [51](#)

Positive Definite and Skew-Hermitian Splitting [27](#), [50–53](#)

Positive Semi Definite [15](#)

Preconditioned [14–16](#), [26](#)

Preconditioned Conjugate Gradient [47](#)

Preconditioner [26](#), [27](#)

R

Random Variable [14](#)

S

Saddle Point Problem [6](#), [7](#), [15](#)

Shift-Splitting [53](#)

Skew-Hermitian [30](#), [50](#), [51](#)

Skew-Symmetric [30](#)

SOR-like [28](#)

Successive overrelaxation [26](#)

Symmetric [30](#)

Symmetric AMD [48](#), [52](#)

U

Unique [51](#)

Upper Hessenberg [31](#)

نمادهای اختصاری

ح

$A \otimes B$ حاصل ضرب کرونکر ماتریس‌های A و B

ع

$\text{cond}(A)$ عدد حالت ماتریس A وابسته به نرم طیفی

ف

$\text{nul}(A)$ فضای پوچ ماتریس A

\mathbb{R}^n فضای حقیقی n بعدی

\mathbb{C}^n فضای مختلط n بعدی

$\mathbb{R}^{m \times n}$ فضای ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ بعدی

$\mathbb{C}^{m \times n}$ فضای ماتریس‌های مختلط $m \times n$ بعدی

ل

\mathbb{R} لیپ‌شیتس سراسری

\mathbb{R} لیپ‌شیتس محلی

م

$\mathbb{R} \geq 0$ مجموعه اعداد حقیقی نامنفی

\mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی

\mathbb{C} مجموعه اعداد مختلط

$\mathbb{R} > 0$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت

\mathcal{R} مجموعه‌ی همه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی از متغیر x

$\Sigma[x]$ مجموعه‌ای از مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها بر حسب متغیر x

ن

$\|A\|_2$ نرم طیفی ماتریس A

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Asymptotically stable پایدار مجانبی

B

Boundary مرز

C

Conncted همبند

Control law کنترلر

Convex hull پوسته‌ی محدب

E

Equilibrium point نقطه‌ی تعادل

Estimate of the region of attraction تخمین ناحیه‌ی جذابیت

G

Gain بهره

Globally asymptotically stable پایدار مجانبی سراسری

Globally Lipschitz لیپ‌شیتس سراسری

Global stabilization پایدارسازی سراسری

I

Invariant set مجموعه‌ی پایا

K

Kronecker product حاصل ضرب کرونکر

L

Locally Lipschitz لیپ‌شیتس محلی

Lyapunov function تابع لیاپانوف

N

Nonlinear system سیستم غیر خطی

O

Origin مبدأ

P

Pseudo-inverse شبه معکوس

R

Radially unbounded شعاعی بیکران

Rational Lyapunov function تابع لیپانوف کسری

Regional stabilization پایدارسازی ناحیه ای

Region of attraction ناحیه ی جذابیت

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

saturation..... اشباع

ب

State-Feedback..... بازخورد حالت

Vector of polynomials..... بردار چندجمله‌ای‌ها

Gain..... بهره

پ

stable..... پایدار

Asymptotically stable..... پایدار مجانبی

Convex hull..... پوسته‌ی محدب

ت

Lyapunov function..... تابع لیاپانوف

Estimate of the region of attraction..... تخمین ناحیه‌ی جذابیت

ح

Kronecker product..... حاصل ضرب کرونگر

ز

Subdifferential..... زیر دیفرانسیل

س

Nonlinear system..... سیستم غیرخطی

Polynomial systems..... سیستم‌های چندجمله‌ای

ش

Pseudo-inverse..... شبه معکوس

Radially unbounded..... شعاعی بیکران

ف

Topological space..... فضای توپولوژیکی

ک

Control law کنترلگر

ل

Globally Lipschitz..... لیپشیتس سراسری

Locally Lipschitz لیپشیتس محلی

م

Point-wise maximum..... ماکزیمم نقطه ای

Origin مبدأ

Sum-of-squares..... مجموع مربعات

ن

Region of attraction..... ناحیهی جذابیت

Abstract

Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems

Mohsen Masoudi

In this thesis, we investigate the solution of a system of linear equations and propose an iterative method which is a generalization of positive definite and skew-Hermitian splitting method. Then we study the saddle point problems and propose some iterative methods and preconditioners for these systems. In continuation, we utilize the positive definite and skew-Hermitian splitting method for the saddle point problems and study its convergence and semi-convergence properties. We will see that this method is a generalization of many existing methods which have been presented for the solution of these problems. Finally, an special case of this method is investigated and the optimal parameters of the method are computed. Numerical results are presented to verify the theoretical results and comparison with other methods.

Keywords: *Saddle point problems, Periconditioner, Convergence, Semiconvergence*



University of Guilan

Office of Vice President for Academic and Graduate Affairs

Declaration of the thesis originality

Hereby, I declare that this thesis entitled *Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems* which has been defended for a Ph.D degree in the field Applied Mathematics in specialization Numerical Analysis in January 2019, is a result of my own research. In the case when some other studies and/or publications have been used in the text are cited. This thesis has not been submitted for any degree in any other institutions, inside or outside of Iran. I hereby undertake that, in the case of making any use from my thesis for publishing articles, books, patent registration, etc., the permission of my major advisor and department is necessary; otherwise, University of Guilan authorities have the right to take action against me based on rules and requirements, and in the case of cancelling my degree, I have no right to claim.

Full name:

Mahsen/Masoudi

Signature:

Date:

2019/2/30



University of Guilan

In The Name of God

Proceeding for Doctor of Philosophy Thesis

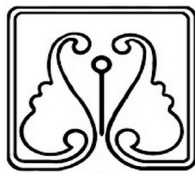
Defense session for granting Ph.D. thesis on award to **Mr Mohsen Masoudi** majoring in **Mathematics** with minor in **Applied Mathematics** title of thesis **Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems** in Guilan province with **20** hours credit, held on **Feb. 26, 2019** at **16:00**, in Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan. The juries announced the following decision:

- ☐ The thesis is accepted with score of 20 ranged as Excellent ☐ Very good ☐ Good ☐ Acceptable ☐.
- ☒ The thesis is acceptable with minor corrections with score 19.5 of 20 ranged as Excellent ☒ Very good ☐ Good ☐ Acceptable ☐.
- ☐ The thesis with present status did not accepted and suggested that.....

Juries' members	Ranks	Specialization	Affiliation	Signature
Major Advisors (s): 1. Davod Khojasteh Salkuyeh	Professor	Numerical Analysis	University of Guilan	
Minor Advisor(s): 1.				
Examiners: 1. Dr. Faezeh Toutounian	Professor	Numerical Analysis	Ferdowsi University of Mashhad	
2. Dr. Saied Ketabchi	Associate Professor	Optimization	University of Guilan	
3. Dr. Hossein Aminikhah	Associate Professor	Numerical Analysis	University of Guilan	

Representative of College Graduate Office	Rank	Affiliation	Signature
Dr. Nasir Taghizadeh	Professor	University of Guilan	

After completing of all documents four copies of the proceeding have to be submitted and handed to the Director of College Graduate Office. From four copies, one will be kept in the student department, one in Graduate Office, one in the file of student and the last hands to the student.



University of Guilan

Department of Applied Mathematics

Specialization: Numerical Analysis

Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems

Student

Mohsen Masoudi

Supervisor

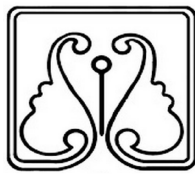
Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh

Advisors

First Advisor

Second Advisor

January 2019



University of Guilan

Faculty of Mathematical Sciences

A thesis submitted in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Doctor in Philosophy

Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems

Student

Mohsen Masoudi

Supervisor

Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh

Advisors

First Advisor

Second Advisor

January 2019